

タイトル	衝撃荷重を受ける半無限弾性体の解析解：軸対称歪みの場合
著者	世戸，憲治；野中，泰二郎
引用	北海学園大学工学部研究報告，36：95-112
発行日	2009-02-20

衝撃荷重を受ける半無限弾性体の解析解
——軸対称歪みの場合——

世戸 憲治*

野中 泰二郎**

Analytical Solution of Semi-Infinite Elastic Body
under Impulsive Loading
— Axial-Symmetric Strain Case —

Kenji SETO* and Taijiro NONAKA**

要旨

半無限弾性体の表面に点対称の衝撃力が加わったとき弾性体に発生する変位を弾性波動論の立場で解析する。また、この場合の最も簡単な例として、表面の円形領域に一樣な衝撃力が、一定時間加えられたときの変位をさらに詳しく解析した。この種の動的境界値問題の解は、一般に、波数 k と角振動数 ω に関する二重積分の形で求められる。この論文では、 ω 積分の方をより簡単な時間積分に変換することが可能であることを示し、解析的にでき得る限りコンパクトな形の解を求めることに成功した。さらに、ここでの解析のより深い理解のため、これら結果に基づくパラメトリックなコンピュータ・シミュレーションを作成した。

0 はじめに

前回の論文では、半無限弾性体の表面の帯状領域に衝撃力が加わった場合、そこで発生する弾性体の変位を弾性波動論の立場で解析した¹⁾。今回の論文では、それに引き続き、半無限弾性体の表面に点対称型の衝撃力が加わったときの変位について、同じく弾性波動論の立場で解析し、特に、表面の半径 r_0 の円内に、一樣な衝撃力が一定時間加わった場合について詳しく解析する。

Lord Rayleigh によって、半無限弾性体の表面波が理論的に解明されて以来^{2),3)}、地震時の地盤と構造物の相互作用の解析という観点から半無限弾性体の振動については色々な形で研究されてきた。まず、その先鞭は、Lamb および Reissner による上下方向の点加振、円加振の場合の解析である^{4),5)}。1950 年代以後には、さらに、上下方向のみならず、水平方向、回転、ねじれ等の各加振に対する解が導かれるようになった。これらの事情については、文献 6) に詳しく述べられているが、これらの研究は、動的解析とはいっても、時間的に三角関数で表わされる定常加振の場

*北海道大学 工学部 建築学科

*Department of Architecture and Building Engineering, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University,
E-mail: seto@elsa.hokkai-s-u.ac.jp

**京都市伏見区醍醐古道町 8-4, E-mail: nonaka_tai@ybb.ne.jp

合だけで、変位の振動もそれに合わせた定常振動の場合に限られてきた。一方、時間的に変動する加振については、Pekeris, Lang, Mitra 等により、加える圧力に対し時間的に階段関数を設定した解が求められているが^{7),8),9)}、この論文では、衝撃力が加わるという境界値問題はもちろんのこと、衝撃力が加わる初めの瞬間における変位がゼロとなる初期値問題についても主眼をおき、出来る限り、解析的な理論解を求めることにした。

この種の解析は、最近では有限要素法による解析が主流をなした感がある。有限要素法による解析では、かなりの程度複雑な構造物に対しても適用できるという利点を持つ一方で、時間発展を追ううちに数値誤差が発生しやすいこと、また、パラメータと解析結果との関連がまったく見えてこないという欠点が存在する。その上で、理論解を求めるという研究は、現在でも価値あるものと考えられる。

1 方程式の導入

前回の論文で導入した方程式と同じであるが、論文の完結性のために、あえて重複を繰り返す。三次元弾性体中の任意の点 (x, y, z) 、任意の時刻 t における変位ベクトルを $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ とする。これから、歪みテンソル ε_{ij} は、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (1.1)$$

と定義される。ここで、コンマの後の添え字はその成分での微分を表わす。また、以下では Einstein の規約にしたがい同じ添え字が 2 度現われたときは、その添え字について 1 から 3 までの和をとるものとする。さらに、この歪みテンソルから、応力テンソル σ_{ij} が、

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} \quad (1.2)$$

と導かれる。ここに、 E , ν はそれぞれ、Young 率、Poisson 比である。 $\sigma_{ij,j}$ は単位体積あたりに作用する i 方向の力となるので、質量密度を ρ とすると、運動方程式は、

$$\rho \ddot{U}_i = \sigma_{ij,j} \quad (1.3)$$

となる。この方程式に (1.1) (1.2) 式を代入すると変位 $\mathbf{U}$ のみを用いて方程式を書き表すことができ、

$$\ddot{\mathbf{U}} = c_\ell^2 \Delta \mathbf{U} + (c_\ell^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (1.4)$$

となる。これが、三次元弾性体の波動方程式である。ここに、 Δ は Laplacian, ∇ はベクトル微分演算子 (nabla) である。また、縦波 (longitudinal wave) 速度 c_ℓ 、横波 (transverse wave) 速度 c_t は

$$c_\ell = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (1.5)$$

と定義される.

ここで, Helmholtz の定理により, 任意のベクトル場は, スカラー場 Φ の勾配とベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転の和で表わされることを用いて,

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.6)$$

と分解する. $\nabla\Phi$ は縦波, $\nabla \times \mathbf{A}$ は横波を表わす. またここで, ベクトル $\mathbf{A}$ の 3 成分のうち, 独立なのは 2 成分だけであることを注意する. ここでは, Lorentz ゲージの取り方に従って,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.7)$$

を仮定する.

ベクトル演算子の公式

$$\nabla \times \nabla = 0, \quad \nabla \cdot \nabla \times = 0, \quad \nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \Delta \quad (1.8)$$

を用いて, 表示式 (1.6) を波動方程式 (1.4) に代入すると,

$$(\nabla\ddot{\Phi}) + (\nabla \times \ddot{\mathbf{A}}) = c_\ell^2 \Delta(\nabla\Phi) + c_t^2 \Delta(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.9)$$

となる. この式の両辺の発散をとると,

$$\Delta(\ddot{\Phi} - c_\ell^2 \Delta\Phi) = 0. \quad (1.10)$$

Laplacian を作用させてゼロとなる関数, すなわち Laplace 方程式の解を調和関数というが, 定義されている境界上でゼロとなる調和関数は, 恒等的にゼロである. この場合も $\ddot{\Phi} - c_\ell^2 \Delta\Phi$ が境界上でゼロとなることを仮定すると, 定義される領域内でゼロとなり,

$$\ddot{\Phi} = c_\ell^2 \Delta\Phi \quad (1.11)$$

が成り立つ. なお, この式は方程式 (1.10) の十分条件であり, この仮定の基に解が矛盾なく求められることで, この仮定の正しさが証明される.

また, (1.9) の回転をとると

$$\Delta(\ddot{\mathbf{A}} - c_t^2 \Delta\mathbf{A}) = 0 \quad (1.12)$$

となるが, これも同じ理由で

$$\ddot{\mathbf{A}} = c_t^2 \Delta\mathbf{A} \quad (1.13)$$

となる.

2 方程式の解法

ここでは図1のように、半無限弾性体を考え、その表面上にデカルト座標の (x, y) を、また、弾性体の深さ方向に z 軸をとる。以下では、この弾性体の表面に原点对称型の衝撃力が面に垂直

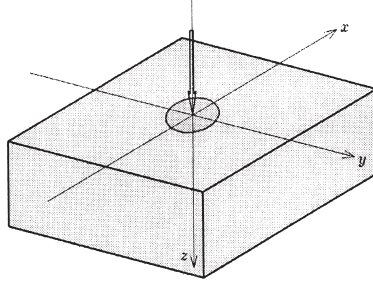


図1 座標系

に作用する場合を取り扱う。この場合、このままデカルト座標 (x, y, z) を用いて議論を展開することも可能であるが、この場合の変位は明らかに z 軸対称に起こるはずで、計算過程の見通しをよくするため、円柱座標 (r, θ, z) を採用した議論を進める。

ここで、円柱座標とデカルト座標間における微分関係式

$$\partial_x = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta, \quad \partial_y = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta, \quad \Delta = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \partial_z^2 \quad (2.1)$$

に注意する。これらを用いて、ベクトル微分演算子 ∇ をデカルト座標から円柱座標に変換すると、まず、スカラー関数 Φ の勾配は、

$$\nabla \Phi = (e_r \partial_r + e_\theta r^{-1} \partial_\theta + e_z \partial_z) \Phi \quad (2.2)$$

となる。ここに e_r, e_θ, e_z は r, θ, z 方向の単位ベクトルで、

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad e_z = (0, 0, 1) \quad (2.3)$$

と定義される。また、ベクトル $\mathbf{A}$ の円柱座標成分を (A_r, A_θ, A_z) すなわち、

$$\mathbf{A} = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_z e_z \quad (2.4)$$

とするとき、 $\mathbf{A}$ の発散、回転は、それぞれ、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = r^{-1} \partial_r (r A_r) + r^{-1} \partial_\theta A_\theta + \partial_z A_z \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = e_r (r^{-1} \partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta) + e_\theta (\partial_z A_r - \partial_r A_z) + e_z r^{-1} [\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r] \quad (2.6)$$

と表わされる。

ここでの議論は、前に述べたとおり、原点を中心とする点対称な衝撃力が面に垂直に加わった場合である。このとき、弾性体の変形は z 軸対称に起こり、変位 $\mathbf{U}$ の円柱座標成分を (U_r, U_θ, U_z) としたとき、 θ 方向の変位は起こらない、つまり、

$$U_\theta = 0 \quad (2.7)$$

となることは明らかである。ここではこのような変形として、ポテンシャルの各成分 Φ, A_r, A_θ, A_z はすべて θ 依存性を持たないものと仮定しよう。さすれば、(1.6) 式から、(2.2) 式と (2.6) 式の和が変位 $\mathbf{U}$ となることから、

$$\partial_z A_r - \partial_r A_z = 0 \quad (2.8)$$

でなければならない。また、(1.7) 式より (2.5) 式の値はゼロと置けるので、

$$r^{-1} \partial_r (r A_r) + \partial_z A_z = 0 \quad (2.9)$$

となる。

ここで、 Φ, A_r, A_θ, A_z に対し、時間 t については Fourier-sine 変換、変数 r については Fourier-Bessel 変換をした形で、

$$\begin{aligned} \Phi(r, z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk \hat{\Phi}(k, \omega) J_0(kr) e^{-h_\ell z} \sin(\omega t) \\ A_r(r, z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk \hat{A}_r(k, \omega) J_1(kr) e^{-h_t z} \sin(\omega t) \\ A_\theta(r, z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk \hat{A}_\theta(k, \omega) J_1(kr) e^{-h_t z} \sin(\omega t) \\ A_z(r, z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk \hat{A}_z(k, \omega) J_0(kr) e^{-h_t z} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

と展開することにする。ここに、 J_0, J_1 はそれぞれ、0 次、1 次の Bessel 関数である。また、 z 方向には指数関数的減衰を仮定し、 h_ℓ, h_t はそれぞれ縦波、横波の減衰係数である。時間に関し、Fourier-sine 変換を仮定したのは、衝撃が加わった瞬間における変位の初期値をゼロとするためである。

Bessel 関数 $J_n(z)$ は微分方程式

$$\left[\frac{1}{\zeta} \partial_\zeta \zeta \partial_\zeta + \left(1 - \frac{n^2}{\zeta^2} \right) \right] J_n(\zeta) = 0 \quad (2.11)$$

を満たすこと、および (2.1) (2.3) (2.4) 式に注意して、(2.10) 式を方程式 (1.11) (1.13) に代入すると減衰係数に対する制限式

$$h_\ell = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_\ell^2}}, \quad h_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}} \quad (2.12)$$

を得る。

さらに, Bessel 関数に関する微分公式

$$\partial_\zeta J_0(\zeta) = -J_1(\zeta), \quad \zeta^{-1} \partial_\zeta [\zeta J_1(\zeta)] = J_0(\zeta) \quad (2.13)$$

を用いて, (2.10) 式における A_r, A_z を (2.8) (2.9) 式に代入すると, 2 本の等式

$$h_t \hat{A}_r - k \hat{A}_z = 0, \quad k \hat{A}_r - h_t \hat{A}_z = 0 \quad (2.14)$$

が成立しなければならない. しかし, これら 2 式が, 2 つ共にゼロではない $\hat{A}_r, \hat{A}_z$ に対して成立するためには (2.12) 式と矛盾するので,

$$\hat{A}_r = \hat{A}_z = 0 \quad (2.15)$$

でなければならない. かくて, ベクトル $\mathbf{A}$ の成分のうち生き残るのは, A_θ の一成分だけとなる. これより, 変位 $\mathbf{U}$ は (1.6) 式より,

$$\mathbf{U}(r, z, t) = e_r [\partial_r \Phi - \partial_z A_\theta] + e_z [\partial_z \Phi + r^{-1} \partial_r (r A_\theta)] \quad (2.16)$$

となるが, これに (2.10) の Φ, A_θ を代入し, $\mathbf{U}$ の成分 U_r, U_z で示すと

$$\begin{aligned} U_r(r, z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk [-k \hat{\Phi} e^{-h_\ell z} + h_t \hat{A}_\theta e^{-h_\ell z}] J_1(kr) \sin(\omega t) \\ U_z(r, z, t) &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk [-h_\ell \hat{\Phi} e^{-h_\ell z} + k \hat{A}_\theta e^{-h_\ell z}] J_0(kr) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる. またこのとき, 変位 $\mathbf{U}$ の発散は,

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk (h_\ell^2 - k^2) \hat{\Phi} e^{-h_\ell z} J_0(kr) \sin(\omega t) \quad (2.18)$$

と求められる. もともと, この発散は体積変化率を表わすので, 体積変化を伴わない横波は関与しないことになる.

3 衝撃力を加えた場合の解

境界値問題

この論文の本題である, 原点を中心に, 点対称の力が面に垂直に作用した場合を考える. このときの単位面積あたりの力 (圧力) を, 原点からの距離 r , 時間 t の関数として $\mathbf{P}(r, t)$ とする. この力が面に垂直であることは,

$$P_r = P_\theta = 0, \quad P_z(r, t) \neq 0 \quad (3.1)$$

を意味する.

弾性体の表面における応力は、この衝撃力と釣り合わなければならないので、境界条件として、

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0, \quad \sigma_{zz} + P_z = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (3.2)$$

が設定される。変位 U が Fourier-Bessel および Fourier-sine 変換された形で表現されているので、この圧力 P_z も同じ変換をしておいた方が便利である。

$$P_z(r, t) = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk \hat{P}_z(k, \omega) J_0(kr) \sin(\omega t) \quad (3.3)$$

ここに、 P_z の逆変換 $\hat{P}_z$ は、Bessel 関数のデルタ関数の意味での直交性

$$\int_0^\infty J_\mu(kr) J_\mu(k'r) r dr = \frac{1}{k} \delta(k - k'), \quad \mu > -1 \quad (3.4)$$

と三角関数 sine の直交性

$$\int_0^\infty \sin(\omega t) \sin(\omega' t) dt = \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega') \quad (3.5)$$

とから求められ、

$$\hat{P}_z(k, \omega) = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty dt \int_0^\infty r dr P_z(r, t) J_0(kr) \sin(\omega t) \quad (3.6)$$

となる。

つぎになすべきことは、境界条件 (3.2) 式を満足すべく、変位 U から応力 σ を作ることである。そのためには、まず、デカルト座標における歪みテンソル (1.1) を円柱座標における歪みテンソルに変換すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r U_r, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_\theta U_r}{r} + \partial_r U_\theta - \frac{U_\theta}{r} \right), & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} (\partial_\theta U_\theta + U_r), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} (\partial_z U_r + \partial_r U_z), & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\partial_z U_\theta + \frac{\partial_\theta U_z}{r} \right), & \varepsilon_{zz} &= \partial_z U_z. \end{aligned} \quad (3.7)$$

となることに注意¹、これを用いて、(1.2) の応力は添え字が変わるだけで

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (3.8)$$

となる。ここに、 α, β は円柱座標成分の r, θ, z のいずれかを指す。

これらの式を用いて、ここで必要な応力を求めておこう。まず、 $U_\theta = 0$ なることと U_z が θ に依存しないことから

$$\sigma_{\theta z} = 0 \quad (3.9)$$

となることは明らかである。つぎに、 σ_{rz} は (2.17) 式を用いて、

$$\sigma_{rz} = G \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk [2kh_\ell \hat{\Phi} e^{-h_\ell z} - (k^2 + h_\ell^2) \hat{A}_\theta e^{-h_\ell z}] J_1(kr) \sin(\omega t) \quad (3.10)$$

¹ 実際にここで必要なのは、(3.7) 式の下段のものだけであるが、上段のものは参考のため載せた。

と表わされる．ここに，一様な弾性体中で成立する Young 率 E , Poisson 比 ν , 剪断弾性係数 G の間の関係式

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.11)$$

を用いた．この σ_{rz} が $z=0$ でゼロとなることから，関係式

$$2kh_\ell\hat{\Phi} - (k^2 + h_t^2)\hat{A}_\theta = 0 \quad (3.12)$$

が成立する．つぎに， σ_{zz} を求める前に，有用な恒等式

$$\nu(h_\ell^2 - k^2) + (1 - 2\nu)h_\ell^2 = \frac{1 - 2\nu}{2}(k^2 + h_t^2) \quad (3.13)$$

を挙げておく．この式は， h_ℓ , h_t の定義 (2.12) 式と (1.5) 式からでる縦波，横波の速度比

$$\gamma \equiv \frac{c_t}{c_\ell} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.14)$$

を用いて証明される．さて， σ_{zz} は，(3.7) (3.8) (2.17) (2.18) (3.13) を利用して，

$$\sigma_{zz} = G \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk [(k^2 + h_t^2)\hat{\Phi}e^{-h_\ell z} - 2kh_t\hat{A}_\theta e^{-h_t z}] J_0(kr) \sin(\omega t) \quad (3.15)$$

と求められる．さて，弾性体の表面 $z=0$ で，この σ_{zz} と圧力 P_z が釣り合うという条件式 (3.2) に対し，(3.3) および (3.15) を用いると

$$(k^2 + h_t^2)\hat{\Phi} - 2kh_t\hat{A}_\theta = -\frac{1}{G}\hat{P}_z(k, \omega) \quad (3.16)$$

を得る．この式と (3.12) とから $\hat{\Phi}$, $\hat{A}_\theta$ を求めることができ，

$$\hat{\Phi}(k, \omega) = -\frac{(k^2 + h_t^2)\hat{P}_z(k, \omega)}{G[(k^2 + h_t^2)^2 - 4k^2h_\ell h_t]}, \quad \hat{A}_\theta(k, \omega) = -\frac{2kh_\ell\hat{P}_z(k, \omega)}{G[(k^2 + h_t^2)^2 - 4k^2h_\ell h_t]} \quad (3.17)$$

と圧力関数の逆変換を用いた形で表わすことができる．これらを (2.17) 式に代入すると境界条件を満たす解が

$$\begin{aligned} U_r(r, z, t) &= \frac{1}{G} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk \frac{k[(k^2 + h_t^2)e^{-h_\ell z} - 2h_\ell h_t e^{-h_t z}]}{(k^2 + h_t^2)^2 - 4k^2h_\ell h_t} \hat{P}_z(k, \omega) J_1(kr) \sin(\omega t) \\ U_z(r, z, t) &= \frac{1}{G} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dk \frac{h_\ell[(k^2 + h_t^2)e^{-h_\ell z} - 2k^2 e^{-h_t z}]}{(k^2 + h_t^2)^2 - 4k^2h_\ell h_t} \hat{P}_z(k, \omega) J_0(kr) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

と求められる．

k 変数の無次元化

(2.12) で定義される h_ℓ , h_t は k と ω の 2 個の積分変数を含み, ここままでは, 解析的にはもちろんのこと数値的にも, その扱いは大変厄介なものとなる. この事態を解消するため, 積分に表れる変数 k を変換し, k から無次元変数 ξ に

$$k = \frac{\omega}{c_t} \xi \quad (3.19)$$

と置き換え, さらに新しい変数

$$\xi_\ell = \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}, \quad \xi_t = \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3.20)$$

を導入する. ここに, γ は (3.14) で定義される縦波横波の速度比である. この ξ_ℓ , ξ_t を用いると (2.12) の h_ℓ , h_t は

$$h_\ell = \frac{\omega}{c_t} \xi_\ell, \quad h_t = \frac{\omega}{c_t} \xi_t \quad (3.21)$$

と書ける. これに対応して, r , z を無次元化した,

$$\bar{r} = \frac{\omega}{c_t} r, \quad \bar{z} = \frac{\omega}{c_t} z \quad (3.22)$$

を導入する. この変数変換を (3.18) 式に適応すると変位 U_r , U_z は

$$\begin{aligned} U_r(r, z, t) &= \frac{1}{G} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \frac{\xi [(2\xi^2 - 1)e^{-\xi_\ell \bar{z}} - 2\xi_\ell \xi_t e^{-\xi_t \bar{z}}]}{R(\xi)} \hat{P}_z\left(\frac{\omega}{c_t} \xi, \omega\right) J_1(\xi \bar{r}) \sin(\omega t) \\ U_z(r, z, t) &= \frac{1}{G} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \frac{\xi_\ell [(2\xi^2 - 1)e^{-\xi_\ell \bar{z}} - 2\xi^2 e^{-\xi_t \bar{z}}]}{R(\xi)} \hat{P}_z\left(\frac{\omega}{c_t} \xi, \omega\right) J_0(\xi \bar{r}) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

と書き改められる. ここに, Rayleigh 関数と呼ばれる $R(\xi)$ は, (3.18) 式における被積分関数の分母から派生するもので,

$$R(\xi) = (2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2 \xi_\ell \xi_t \quad (3.24)$$

と定義される. なお, この Rayleigh 関数は, $\xi > 1$ の領域に, 縦波横波の速度比 γ で決まる 1 個のゼロ点 ξ_0 を持つ. 数値的には, γ が 0 から $1/\sqrt{2}$ に近づくにつれ, このゼロ点 ξ_0 の値はしだいにゆっくりと大きくなり, およそ,

$$1.046 \cdots < \xi_0 < 1.144 \cdots \quad (3.25)$$

の範囲に収まることが知られている. いずれにしても 1 より若干大きな値である. したがって, (3.23) の被積分関数はその点で極を持つことになる. なお, この Rayleigh 極に関する取り扱いについては後の節で議論することにする.

これで, 半無限弾性体の表面に衝撃を与えた場合の解が求まった. この解は, 境界条件を満たし, かつ, $t = 0$ で変位 U_r , U_z がゼロとなる初期条件も満たしている. この無次元変数 ξ を導入したことで, かなりの程度, 数式の改善になってはいるが, 実際に (3.23) 式に現れる二重積分を

実行するには、まだなお、困難が伴う。唯一可能性のある簡単化は、半無限弾性体の表面 $z = 0$ での変位を求めることである。このときは、

$$\begin{aligned} U_r(r, t) &= \frac{1}{G} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \frac{\xi N(\xi)}{R(\xi)} \hat{P}_z\left(\frac{\omega}{c_t} \xi, \omega\right) J_1(\xi \bar{r}) \sin(\omega t) \\ U_z(r, t) &= \frac{-1}{G} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\xi \frac{\xi_\ell}{R(\xi)} \hat{P}_z\left(\frac{\omega}{c_t} \xi, \omega\right) J_0(\xi \bar{r}) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

とかなりの程度、困難さは緩和される。ここに、 $N(\xi)$ は

$$N(\xi) = 2\xi^2 - 2\xi_\ell \xi_t - 1 \quad (3.27)$$

と定義した。また、このときの変位は z 変数を除いて、 $U_r(r, t)$, $U_z(r, t)$ のように記すことにする。以下では、もっぱら、この表面だけでの変位を求めることにしよう。

4 具体的な衝撃力による計算例

時間的に矩形波型の衝撃力

前節までで、一般的な衝撃力が加わった場合の解を求めたが、このままでは積分が難しすぎて、解のようすはまったく見えてこない。ここでより具体化された衝撃力を入力し、もう少し解のようすが見やすいようにしよう。まず、加える圧力 $P_z(r, t)$ は、原点を中心とする半径 r_0 の円内にトータルとしての力積 I_0 が、一定時間 $t = 0$ から $t = t_0$ まで作用するものとする。このとき、 $P_z(r, t)$ は

$$P_z(r, t) = \frac{I_0}{\pi r_0^2 t_0} u(t_0 - t) u(r_0 - r) \quad (4.1)$$

と書き表せる。ここに、 u は単位階段関数である。(3.6) 式に従って、この圧力の逆変換 $\hat{P}_z$ を求めると

$$\hat{P}_z(\xi, \omega) = \frac{2I_0}{\pi^2 r_0 t_0} J_1(r_0 \omega \xi / c_t) \frac{1 - \cos(\omega t_0)}{\omega} \quad (4.2)$$

となる。ここで Bessel 関数の積分には (2.13) の第 2 式を用いた。また、 $\hat{P}_z(\omega \xi / c_t, \omega)$ は改めて $\hat{P}_z(\xi, \omega)$ と書いた。ここで 1 つの注意点について述べておく。(4.1) 式で与えられる圧力 P_z は作用時間 t_0 がゼロの極限では、デルタ関数的に作用する衝撃力となるが、一方このとき、(4.2) の逆変換の方はこの極限でゼロになってしまう。

この逆変換 $\hat{P}_z$ を (3.26) 式に代入し、変位 U_r , U_z を求めると、

$$\begin{aligned} U_r(r, t) &= \frac{2I_0}{\pi^2 G r_0 t_0} \int_0^\infty \frac{\xi N(\xi)}{R(\xi)} K_r(r, t, \xi) d\xi \\ U_z(r, t) &= \frac{-2I_0}{\pi^2 G r_0 t_0} \int_0^\infty \frac{\xi_\ell}{R(\xi)} K_z(r, t, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる．ここに， K_r ， K_z は ω 積分を抽出した項で，

$$\begin{aligned} K_r(r, t, \xi) &= \int_0^\infty \frac{1}{\omega} J_1(r_0\omega\xi/c_t) J_1(r\omega\xi/c_t) \sin(\omega t) [1 - \cos(\omega t_0)] d\omega \\ K_z(r, t, \xi) &= \int_0^\infty \frac{1}{\omega} J_1(r_0\omega\xi/c_t) J_0(r\omega\xi/c_t) \sin(\omega t) [1 - \cos(\omega t_0)] d\omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

と定義される．この積分は入手できる限りの数学公式集には存在しないが，これを時間で微分した

$$\begin{aligned} \partial_t K_r(r, t, \xi) &= \int_0^\infty J_1(r_0\omega\xi/c_t) J_1(r\omega\xi/c_t) \cos(\omega t) [1 - \cos(\omega t_0)] d\omega \\ \partial_t K_z(r, t, \xi) &= \int_0^\infty J_1(r_0\omega\xi/c_t) J_0(r\omega\xi/c_t) \cos(\omega t) [1 - \cos(\omega t_0)] d\omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

の形のは公式集の範囲で積分が実行される．より簡単化するため，

$$\begin{aligned} S_r(r, t, \xi) &= \int_0^\infty J_1(r_0\omega\xi/c_t) J_1(r\omega\xi/c_t) \cos(\omega t) d\omega \\ S_z(r, t, \xi) &= \int_0^\infty J_1(r_0\omega\xi/c_t) J_0(r\omega\xi/c_t) \cos(\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

を定義しておこう．さすれば，三角関数の積和公式より，(4.5) 式は

$$\begin{aligned} \partial_t K_r(r, t, \xi) &= S_r(r, t, \xi) - \frac{1}{2} [S_r(r, t + t_0, \xi) + S_r(r, |t - t_0|, \xi)] \\ \partial_t K_z(r, t, \xi) &= S_z(r, t, \xi) - \frac{1}{2} [S_z(r, t + t_0, \xi) + S_z(r, |t - t_0|, \xi)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

と表わされるので，もとの K_r ， K_z は

$$\begin{aligned} K_r(r, t, \xi) &= \int_0^t \left\{ S_r(r, t', \xi) - \frac{1}{2} [S_r(r, t' + t_0, \xi) + S_r(r, |t' - t_0|, \xi)] \right\} dt' \\ K_z(r, t, \xi) &= \int_0^t \left\{ S_z(r, t', \xi) - \frac{1}{2} [S_z(r, t' + t_0, \xi) + S_z(r, |t' - t_0|, \xi)] \right\} dt' \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる．

そこで，(4.6) 式の S_r ， S_z であるが，これは公式集²によると，まず， S_r の方から¹⁰⁾

$$S_r(r, t, \xi) = \begin{cases} \frac{c_t}{\pi\xi\eta_r\sqrt{rr_0}} \left[(2\eta_r^2 - 1) \mathbf{K}(\eta_r^{-1}) - 2\eta_r^2 \mathbf{E}(\eta_r^{-1}) \right], & c_t t < \xi|r - r_0| \\ \frac{c_t}{\pi\xi\sqrt{rr_0}} \left[\mathbf{K}(\eta_r) - 2\mathbf{E}(\eta_r) \right], & \xi|r - r_0| < c_t t < \xi(r + r_0) \\ 0, & \xi(r + r_0) < c_t t \end{cases} \quad (4.9)$$

ここに， $\mathbf{K}$ ， $\mathbf{E}$ は第 1 種，第 2 種の完全楕円積分であり，また，楕円積分の母数 η_r は

$$\eta_r = \frac{\sqrt{\xi^2(r + r_0)^2 - (c_t t)^2}}{2\xi\sqrt{rr_0}} \quad (4.10)$$

²この積分のように，三角関数と 2 個の Bessel 関数からなる積分に関しては，日本および米国で編纂された数学公式集には見当たらないが，ロシアで編纂された公式集に掲載されており，その日本語版が出版されている．参考文献 10)．

と定義される．また， S_z の方は¹¹⁾

$$S_z(r, t, \xi) = \begin{cases} 0, & c_t t < \xi(r - r_0) \\ \frac{c_t}{\xi r_0}, & c_t t < \xi(r_0 - r) \\ \frac{c_t}{\xi r_0} \left[1 - \Lambda_0(\alpha, \eta_z) + \frac{\xi r - c_t t}{\pi \xi \sqrt{r r_0}} \mathbf{K}(\eta_z) \right], & \xi|r - r_0| < c_t t < \xi(r + r_0) \\ \frac{c_t}{\xi r_0} \left[1 - \Lambda_0(\beta, \eta_z^{-1}) - \frac{1}{\pi \eta_z} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \mathbf{K}(\eta_z^{-1}) \right], & \xi(r + r_0) < c_t t \end{cases} \quad (4.11)$$

ここに，2つの角 α , β , および，このときの楕円積分の母数 η_z は，

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2\xi r}{c_t t + \xi(r + r_0)}}, \quad \beta = \arcsin \sqrt{\frac{c_t t + \xi(r - r_0)}{c_t t + \xi(r + r_0)}} \quad (4.12)$$

$$\eta_z = \frac{\sqrt{(c_t t)^2 - \xi^2(r - r_0)^2}}{2\xi \sqrt{r r_0}} \quad (4.13)$$

であり，また，関数 Λ_0 は¹²⁾，第1種，第2種の不完全楕円積分 $F(\phi, \eta)$, $E(\phi, \eta)$ を用いて，

$$\Lambda_0(\phi, \eta) = \frac{2}{\pi} \left[\mathbf{E}(\eta) F(\phi, \sqrt{1 - \eta^2}) + \mathbf{K}(\eta) E(\phi, \sqrt{1 - \eta^2}) - \mathbf{K}(\eta) F(\phi, \sqrt{1 - \eta^2}) \right] \quad (4.14)$$

と定義される関数である．³

ただし，これら (4.9) 式から (4.14) 式を使ううえで， $\xi = 0$ または， $r = 0$ のとき，これらの式の値は不定形になってしまうので，数値的にそこでの値を求めるときは注意がいる． S_r , S_z の定義式 (4.6) から， $\xi = 0$ のときは， $J_1(0) = 0$ なので，ただちに

$$S_r(r, t, 0) = 0, \quad S_z(r, t, 0) = 0 \quad (4.15)$$

が言える．また， $r = 0$ のときは， $J_0(0) = 1$ なので

$$\begin{aligned} S_r(0, t, \xi) &= 0 \\ S_z(0, t, \xi) &= \int_0^\infty J_1(r_0 \omega \xi / c_t) \cos(\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

となるが，この S_z の方の積分を実行すると¹⁴⁾

$$S_z(0, t, \xi) = \begin{cases} \frac{c_t}{r_0 \xi}, & c_t t < r_0 \xi \\ -\frac{c_t r_0 \xi}{\sqrt{(c_t t)^2 - (r_0 \xi)^2} [c_t t + \sqrt{(c_t t)^2 - (r_0 \xi)^2}]}, & r_0 \xi < c_t t \end{cases} \quad (4.17)$$

³この $\Lambda_0(\phi, \eta)$ という関数は， $\phi = \pi/2$ のとき， F , E は，それぞれ，完全楕円積分 $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ となり，

$$\Lambda_0(\pi/2, \eta) = \frac{2}{\pi} [\mathbf{E}(\eta) \mathbf{K}(\sqrt{1 - \eta^2}) + \mathbf{K}(\eta) \mathbf{E}(\sqrt{1 - \eta^2}) - \mathbf{K}(\eta) \mathbf{K}(\sqrt{1 - \eta^2})]$$

となるが，この値は，恒等的に 1 となる．これを Legendre の関係式という¹³⁾．

となる。

(4.4) 式で与えられる K_r , K_z は 1 個の積分を含む。それを (4.8) のように変形したからと言って積分の数が減ったわけではない。これらの積分はいずれにしても数値的に実行せざるを得ない。(4.8) 式に変形したことで、むしろ、楕円積分などがでてきて煩雑になってしまった感がある。しかし、(4.4) 式における ω 積分と (4.8) 式における t 積分とでは、数値的に実行するときのし易さは断然 (4.8) 式の方である。コンピュータで楕円積分をあらかじめ算出させ、その数値データをメモリーしてしまえば、ここで扱っている現象の時間発展をシミュレートするとき、初めの $t = 0$ の瞬間から、現在時刻 t までの各時間刻み毎の和をとりながら時間発展させることで積分ができてしまうからである。

最後に残る (4.3) 式の ξ 積分であるが、これは数値的に実行せざるを得ない。ここで注意すべきことは、まず、変位なるものは、実数値で求まらなければいけない。これらの式の被積分関数は、(3.20) 式で定義される関数 ξ_ℓ , ξ_t を含むが、これらの関数は実軸上に分岐点を持つ。また、Rayleigh 極が存在するためその留数のとり方にも不定性がある。したがって、不用意に積分してしまうと意味のない複素数値の変位が求まってしまう。

これを避ける最良の方法は、前回の論文で示したとおり、 ϵ を正の微小量として、 ξ の積分路を $\xi + i\epsilon$ としたものと $\xi - i\epsilon$ としたものを足して 2 で割ることである。こうすることで、被積分関数は上下の積分路上で互いに複素共役になっているので、分岐切断線上では、実数部を、また、Rayleigh 極に関しては積分の主値のみを採用すればよい。式で示すと、

$$\int_0^\infty d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(\int_{i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d\xi + \int_{-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} d\xi \right) \quad \Rightarrow \quad \Re \int_0^\infty d\xi \quad (4.18)$$

と理解して積分することである。ここに、 $\Re$ は実部をとることを意味する。

もう一つ、この積分で注意すべきことは、いくつかの楕円積分が存在するが、それらの母数は、各定義域で必ず 0 から 1 の範囲内に収まっており、これら楕円積分は必ず実数値をとる。したがって、不用意な虚数がでる可能性は、前に述べた関数 ξ_ℓ , ξ_t と Rayleigh 極の存在のみであることを注意する。もう一つ注意すべきこととして、これら楕円積分に起因する発散が生じないかという心配である。確かに、第 1 種完全楕円積分 $\mathbf{K}$ はその母数が 1 のところで、対数発散し¹³⁾,

$$\mathbf{K}(\eta) \rightarrow -\frac{1}{2} \log(1-\eta), \quad \text{for } \eta \rightarrow 1-0 \quad (4.19)$$

となる。しかし、対数発散しても、その積分値は有限になるので問題はないが、数値積分をするときは注意が必要である。

コンピュータ・シミュレーション

これまでの解析にしたがって、衝撃荷重を受ける半無限弾性体の変位をコンピュータでシミュ

レートしてみる．ここでは，弾性体の物性定数および衝撃荷重の各定数を

$$\begin{aligned} E &= 22.0 \text{ GPa}, & \nu &= 0.2, & \rho &= 2.5 \text{ ton/m}^3, \\ I_0 &= 1 \text{ kNewton} \cdot \text{sec}, & r_0 &= 10 \text{ m}, & t_0 &= 0.01 \text{ sec} \end{aligned} \quad (4.20)$$

と設定する．このとき，これら定数から派生する各定数はつぎのようになる．

$$c_\ell = 3.127 \text{ km/s}, \quad c_t = 1.915 \text{ km/s}, \quad \gamma = 0.6123, \quad \text{Rayleigh pole } \xi_0 = 1.0977. \quad (4.21)$$

以下，図 2 以後にシミュレートした結果を示す．図 2 は衝撃を加える $t = 0$ の瞬間における弾性体の表面の様子を示す．原点を中心とする縦の 2 本の点線は衝撃が加わる範囲を示す．この図は原点から半径 $r = 123 \text{ m}$ の範囲を示す．初めに，変位 U_r の方を，時間を追って図 3 から図 6 までに示す．本来， U_r は面に平行な方向での変位であるが，これを平行な方向に描いてしまうとわからなくなってしまうので，その変位は縦方向に描くことにする．この図で水平面より上（プラス）の変位は右方向への変位，水平面より下（マイナス）の変位は左方向への変位を表わす．ただし，このときのスケールは図として見やすくするための任意スケールである．

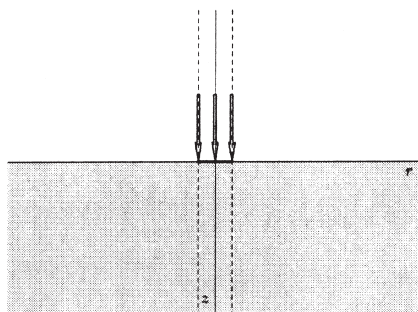


図 2 $t = 0 \text{ sec}$

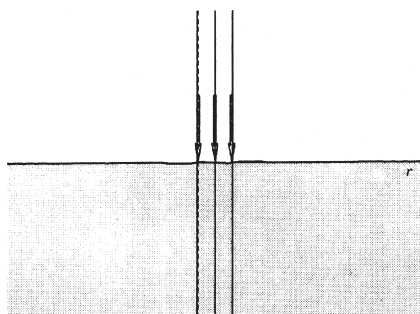


図 3 変位 U_r , $t = 0.0002 \text{ sec}$

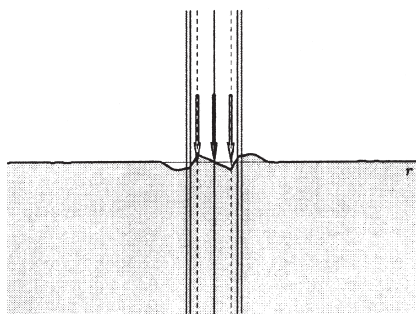


図 4 変位 U_r , $t = 0.002 \text{ sec}$

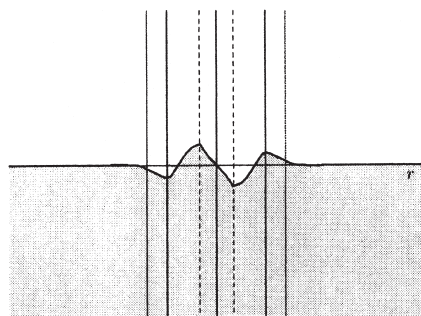
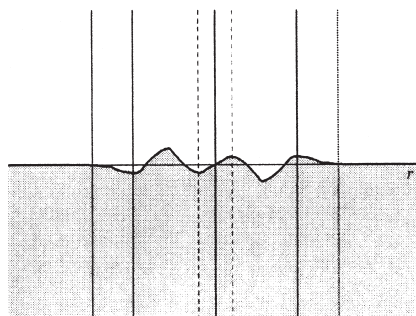
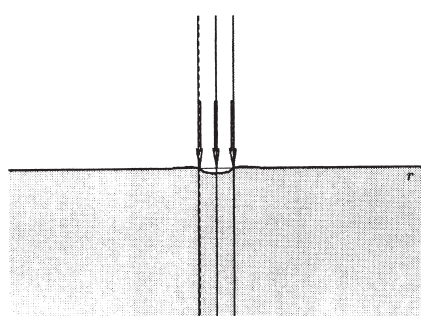
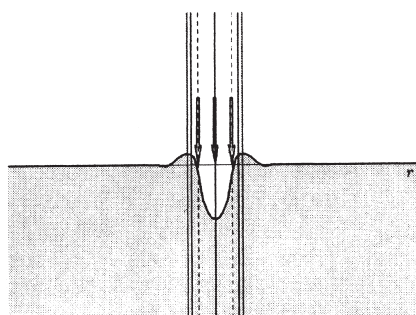
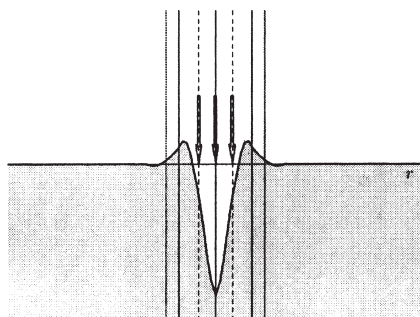
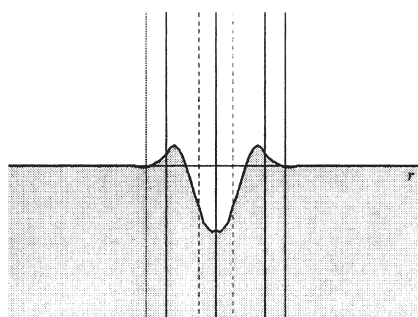
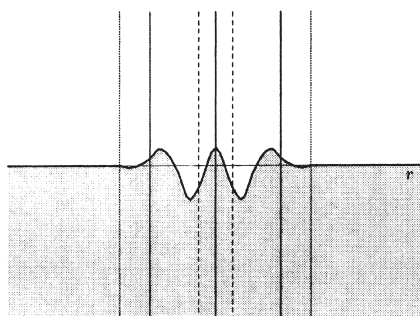
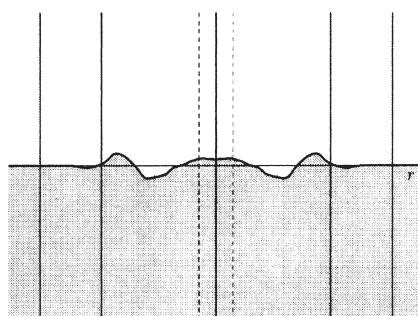

 図 5 変位 U_r , $t = 0.01$ sec

 図 6 変位 U_r , $t = 0.02$ sec

図 3 以下で、一番外側の 2 本の縦線（赤色）は、 $r = r_0$ から出発した縦波速度が到達する範囲を、また、その内側の 2 本の縦線（青色）は横波速度が到達する範囲を示す。図 4 でわかるように、衝撃力が加わっている間は、縦波速度の到達範囲外まで変位が起こっているが、衝撃力がなくなる図 5 以下では、縦波速度到達範囲外での変位は起こらなくなることがわかる。

つぎに、変位 U_z の方を、時間を追って図 7 から図 12 までに示す。この変位はまさしく縦方向の変位である。衝撃力が作用すると当然のことながら力を受けた部分はへこむはずであり、そのことによって内部の圧力が上がる。圧力が上がるとその影響がまわりに波及し、力を加える作用円の外側部分は盛り上がる。一方、力を受けて一度へこんだ中央部分はその反動で時間が経つとつぎには盛り上がってきて、ちょうど阿蘇山のような二重火山を形成する。あるいは隕石の衝撃によって形成される月のクレータと言った方がよいかもしれない。月のクレータの場合はある程度変位が広がったところで、内部摩擦による塑性変形が残りそのままの形で固形化してしまったものと考えられる。この解析では、内部摩擦を考慮していないので、そのまま永遠に広がり続けることになる。


 図 7 変位 U_z , $t = 0.0002$ sec

 図 8 変位 U_z , $t = 0.002$ sec

図 9 変位 U_z , $t = 0.006$ sec図 10 変位 U_z , $t = 0.01$ sec図 11 変位 U_z , $t = 0.015$ sec図 12 変位 U_z , $t = 0.03$ sec

5 おわりに

この論文では、半無限弾性体の表面の点対称領域に衝撃を与えたときどのような変位が発生するかを弾性波動論の立場で解析した。初めこの研究は、与える衝撃を時間的にデルタ関数としてそのときの解を求め、衝撃が時間的に分布したときの解は、デルタ関数で求めた解を連続的に重ね合わせることで、Duhamel 積分の形に持ち込んで求めようとした。しかし、この方法には大きな難点があった。時間的にデルタ関数で与えられる衝撃を記述する解は、Fourier-cosine 変換を用いて展開しなければならない。Fourier-sine 変換では、衝撃の逆変換である $\hat{P}_z$ がゼロになってしまうからである。ところが、Fourier-cosine 変換で展開した解は、衝撃を与えた瞬間の $t = 0$ で有限の大きさの変位を持ってしまい初期条件を満たさなくなる。初めこれは、解の自由度が不足しているためと考え、より一般的な解を求めようとしたが、これは失敗に終わった。

そこでこの論文では、衝撃をデルタ関数で与えることを諦め、初めから時間的に分布しているものとし、解は Fourier-sine 変換をもって記述することにした。Fourier-sine 変換で記述される

解は、衝撃の瞬間の $t = 0$ で変位をゼロにすることができ、自動的に初期条件を満たす解になる。やはり、この方法が内部矛盾を含まない最も正しい方法と考えられる。一次元的な弦や棒の衝撃問題を扱うときは、時間的にデルタ関数の衝撃を仮定して解くことができる。しかし、2 次元的な膜の衝撃問題を扱うときに、時間的にデルタ関数の衝撃を仮定してしまうと、やはり初期値問題が解けなくなってしまう。半無限弾性体の衝撃問題もこれと同じ事情であると考えられる。

この論文では、衝撃を与える空間的領域として最も簡単な円形領域、時間的にはこれも最も単純な矩形波型のものを採用した。それにも拘わらず、その解はかなり煩雑なものとなった。おそらく、これが解析的に計算できる限界であると考えられる。例えば、衝撃を与える空間領域を正規分布 (Gauss 分布) 型、時間的に χ^2 分布型などを仮定して解くことができれば大変おもしろいのであるが、これでは最後の ω 積分が残ってしまい数値的に積分を実行せざるを得なくなる。いくら解析解とはいえあまりに複雑化してしまうと、これでは有限要素法で解く方がよいことになってしまうのではと危惧される。

6 参考文献

- 1) 世戸憲治, 野中泰二郎, 「衝撃荷重を受ける半無限弾性体の解析解 — 平面歪みの場合 — 」北海学園大学工学部研究報告 No. 35, (2008).
- 2) ランダウ・リフシツ, 「弾性理論」東京図書 134-139, (1972)
- 3) Graff, Karl. F. *Wave Motion in Elastic Solid*. Dover Publications Inc., 323-328 New York, (1975)
- 4) Lamb, H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **203 A**, 1-42, (1904)
- 5) Reissner, E. Stationäre, axialsymmetrische, durch eine Schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, *Ingenieur-Archiv*, VII Band, 381-396, (1936)
- 6) 井口道雄, 篠崎祐三, 吉田一博 他, 「入門・建物と地盤との動的相互作用」日本建築学会, (1996)
- 7) Pekeris, C. L. The Seismic Surface Pulse. *Proc. natn. Acad. Sci. U. S. A.* **41**, 469-480 (1955)
- 8) Lang, H. A. Surface Displacements in an Elastic Half-Space. *Z. angew Math. Mech.* **41**, 141-153 (1961)
- 9) Mitra, M. Von. Disturbance Produced in an Elastic Half-Space by Impulsive Normal Pressure. *Proc. Camb. phil. Soc. math. phys. Sci.* **60**, 683-696 (1961)
- 10) 大槻義彦 監修, 室谷義昭 訳, 「新数学公式集 特殊関数」丸善, 公式番号 2. 12. 40. 1, P.224. (1983)
- 11) 同書, 公式番号 2. 12. 40. 2, 3, 6, P.225.

12) 同書, P.749.

13) 森口繁一, 宇田川 久, 一松信 著, 「数学公式 一微分積分・平面曲線一」岩波全書, P.228.
(1956)

14) 10) と同書, 公式番号 2. 12. 15. 2, P.192