

タイトル	AHPの感度分析結果を用いた代替案ウェイトについて
著者	大西，真一；山ノ井，高洋；今井，英幸
引用	北海学園大学工学部研究報告，32：167-174
発行日	2005-02-21

AHPの感度分析結果を用いた代替案ウェイトについて

大 西 真 一*・山ノ井 高 洋*・今 井 英 幸**

A Study on a Representation for Weights of Alternatives by use of Sensitivity Analysis in AHP

Shin-ichi OHNISHI*, Takahiro YAMANOI* and Hideyuki IMAI**

あらまし

階層化分析法AHPは主観的判断とシステムアプローチをうまくミックスした問題解決型（提案型）手法の一つで、今日では意思決定の代表的な手法となっている。しかし実際の応用においては、一対比較行列の整合度が悪く、データに信頼性が不足している場合が多く見受けられる。本研究ではそのような場合は意思決定者の回答があいまいさを含んでいると考え、そのためウェイトも同様のあいまいさを含むものと仮定する。それを表現するためにここでは感度分析結果を利用したファジィ集合によるウェイト表現を用い、さらにあいまいさの広がりを抑える演算をウェイトの統合において導入する。この結果、どのようなあいまいさが代替案のウェイトに含まれているかを効果的に調べる事が可能となった。

1. はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process, 階層分析法）は1977年にSaatyにより提案され [1,2], 今日では意思決定の分野で幅広く使われている手法である。データとなる一対比較行列から項目と代替案の局所的ウェイトを算出した後に、最終的に代替案の総合ウェイトにより選好を明らかにする。通常、AHPでは意思決定者に正確な一対比較を要求するが、実際には正確に重要性の比を推定し表現することは難しく、データ自体の信頼性の悪さがしばしば指摘される。現実にはデータ行列が十分な整合性を持たないことが多いという現象によく表れている。

この問題を解決するための一つの方法として、ファジィ数を一対比較行列の成分として使う

* 北海学園大学工学部電子情報工学科

* Department of Electronics and Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

** 北海道大学大学院工学研究科システム情報工学専攻

** Division of Systems and Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University

様々な手法 [14, 15] も活発に提案されているが、本研究ではウェイトも同様のあいまいさを含むものと仮定する。それを表現するために感度分析結果を用いたファジィ集合によるウェイト表現 [9, 12] を用い、代替案のウェイトの算出にあたっては、制約条件（相互作用）に注目し、あいまいさの広がりを抑える演算 [3, 8] を用いる。この結果により、どのようなあいまいさが代替案のウェイトに含まれているかを読み取る手がかりが与えられることになると考えられる。

2. AHP

AHPはそれまでモデル化したり定量化したりすることが難しかった問題も扱えるようにしているのが特徴で、他のモデルと異なる点としては

- ①人間が扱っている主観や勘が反映されるようにモデルが作られていること
 - ②多くの目的を同時に考慮できるようなモデルであること
 - ③あいまいな環境を明確に説明できるモデルであること
 - ④意思決定者が容易にこのモデルを使えること
- などが挙げられる。

2.1. 手順

AHPの手順は以下の通りである。

（手順1）階層図の作成

複雑な状況下にある問題を階層構造に分解して階層図を作る。

（手順2）各階層での要素間の対比較

意思決定者に各階層の各要素が他と比べてどの程度重要と考えているかを答えてもらい、一対比較行列 A を作る。その要素 a_{ij} は、要素 i が j と比べてどの程度重要であるかによって $1/9$ から 9 の値をとり、

$$a_{ji} = 1/a_{ij}, a_{ii} = 1, i, j = 1, \dots, n \quad (1)$$

とする。ここで n は階層内の要素の数である。

（手順3）各階層でのウェイトの計算

本研究でのウェイトは一対比較行列のフロベニウス根（正の最大固有値）に対応する規準化された固有ベクトル

$$w = (w_i), \sum_i^n w_i = 1 \quad (2)$$

を用いる。

（手順4）ウェイトの合成による代替案の評価

各階層の評価項目間のウェイトを合成することにより、階層全体の重み付けを行う。いま、レベル k の要素 i のウェイトを w_{ki} 、親要素 i に関するレベル $k+1$ の子要素 j のウェイトを v_{ij} 、また j の親要素の集合を F_j とした場合、

$$w_{k+1j} = \sum_{i \in F_j} w_{ki} v_{ij} \quad (3)$$

によってレベル $k+1$ の要素 j の合成ウェイトを求めることができる。この繰り返しにより最終的に各代替案のウェイトが求まり、総合目的に対する代替案の優先順位が決定する。

2.2. 整合度

一対比較により得られた数値はあくまでも二つの項目の価値の比較であるから、全体として首尾一貫した整合性をもっているかどうかはわからない。そこで全体の整合性を計る整合度 C.I. が次のように定義されている。

$$C.I. = \frac{\lambda_A - n}{n-1} \quad (4)$$

ここで λ_A は行列 A のフロベニウス根である。常に C.I. は非負であり、C.I. の値が小さいほど整合性があり、 A が完全に整合していると C.I. = 0 となる。一般には C.I. < 0.1 であれば整合性があるとみなせる。

意思決定者は評価要素が n 個ある階層では $n(n-1)/2$ 回の一対比較をすることになるので、 n の増加に伴って急速に整合性が失われる場合が多い。

3. 感度分析

意思決定者の回答パターンがデータ構造にどのように影響を与えているかを調べる方法に感度分析がある。AHPにおいては、一対比較行列の各成分が整合度やウェイトに対してどのように影響を与えているのかを調べる必要が生じる。これにより結果の解釈に手がかりが与えられたり、データの構造を知ることが可能となる。

本研究ではデータの構造を変えずに、比較的簡便に使用できるAHPの感度分析 [9] を利用する。その内容は一対比較行列に摂動を与えたときの整合度やウェイトの変動に、最も影響を与えている行列の要素を探索する手法である。

一対比較行列 A は正の正方行列なのでペロン・フロベニウスの定理が成り立ち、それにより摂動を与えた一対比較行列について次の定理が成り立つ。

定理 1

$A = (a_{ij})$, $(i, j = 1, \dots, n)$ を正の正方行列とし、それに摂動を与えた行列を $A(\epsilon) = A + \epsilon D_A$, $D_A = (a_{ij} d_{ij})$ とする。また、 λ_A を A のフロベニウス根、 w_1 をそれに対応する固有ベクトル、 w_2 を A' のフロベニウス根 ($= \lambda_A$) に対応する固有ベクトルとすると、摂動を与えた後の一対比較

行列 $A(\varepsilon)$ のフロベニウス根 $\lambda(\varepsilon)$ ，およびそれに対応する固有ベクトル $w_1(\varepsilon)$ は

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_A + \varepsilon \lambda^{(1)} + o(\varepsilon), \quad (5)$$

$$w_1(\varepsilon) = w_1 + \varepsilon w^{(1)} + o(\varepsilon). \quad (6)$$

と表すことができる。ただし，ここで

$$\lambda^{(1)} = \frac{w_1' D_A w_1}{w_1' w_1} \quad (7)$$

であり， $w^{(1)}$ は

$$(A - \lambda_A I) w^{(1)} = -(D_A - \lambda^{(1)} I) w_1 \quad (8)$$

を満たす n 次元ベクトル， $o(\varepsilon)$ は全ての要素が $o(\varepsilon)$ である n 次元ベクトルを表すものとする。

3.1. 整合度の感度分析

定理 1 から，摂動を与えた一対比較行列の整合度について次の系が得られる [12]。

系1.

摂動を与えた後の整合度の変動部分 $C.I.^{(1)}$ は適当な係数 g_{ij} を用いて次のように表現できる。

$$C.I.^{(1)} = \sum_i \sum_j g_{ij} d_{ij}. \quad (9)$$

この系 1 の証明，および係数の計算方法は [9] を参照されたい。

系 1 より変動部分 $C.I.^{(1)}$ は d_{ij} の一次結合で表されていることが分かり，係数 g_{ij} から整合度に対する一対比較行列の成分の影響の大きさを評価することができる。

なお，一対比較行列においては対称成分の逆数関係が成り立つため， $d_{ji} = d_{ij}$ が導かれる。この性質を使うと整合度の変動部分は $d_{ij} (i < j)$ の一次結合で表現することができる。こちらの方が影響の大きさは評価しやすいが，ここでは後でファジィウェイトで用いるために逆数関係を利用していない。

3.2. ウェイトの感度分析

同様に定理 1 から摂動を与えた一対比較行列のウェイトについて次の系が得られる [12]。

系2.

摂動を与えた後のウェイトの変動 $w^{(1)} = (w_k^{(1)})$ は適当な係数 h_{kij} を用いて次のように表現できる。

$$w_k^{(1)} = \sum_i \sum_j h_{kij} d_{ij}. \quad (10)$$

系 2 の d_{ij} の係数 h_{kij} から，ウェイト $w_k^{(1)}$ に対する一対比較行列の成分の影響の大きさを評価することができる。

4. ファジィ集合による代替案の総合ウェイト表現

実際のAHPの応用においてはデータに信頼性が不足している場合が多く見受けられる。原因は評価項目の多さや意思決定者が持つあいまいさなどであり、一対比較行列の整合度が多少悪くなる($0.1 < C.I. < 0.2$)という結果に現れる。

そのようなときは一対比較行列の各成分（意思決定者の判断）があいまいさを含んでいると考えられるので、ウェイトもまたクリスプな値でなく、あいまいさを含んだ形で表現することが望ましい。そこで、ここではまず感度分析結果を用いたファジィ集合によって評価項目のウェイトを表現し、それを用いた場合の代替案の総合ウェイトを提案する。

あいまいさを含む評価項目のウェイトでもやはりその和が1に規準化という条件は成り立つ。よって代替案総合ウェイトの算出においても、独立的な変数を用いるときと異なった演算が使われ、結果のあいまいさの増大は抑えられる。

4.1. ファジィ数

ここでファジィ表現に使う集合としてはL-Rファジィ数を用いる。ファジィ数とは数値軸上のファジィ集合であり、L-Rファジィ数

$$M = (m, \alpha, \beta)_{LR} \quad (11)$$

はメンバシップ関数が次の式によって与えられるファジィ数である。

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & (x \leq m) \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & (x > m) \end{cases} \quad (12)$$

ここで L, R は

$$(i) \quad L(x) = L(-x)$$

$$(ii) \quad L(0) = 1$$

$$(iii) \quad L(x) \text{ は非増加関数}$$

の性質を満たす型関数であり、 m が中心、 α, β がそれぞれ左右の広がりを表している。

4.2. 評価項目のファジィウェイト

系1と系2の式(9), (10)に現れた係数の積 $g_{ij}h_{kij}$ は、一対比較行列の成分 a_{ij} が項目 k に与える影響と見ることができる。この積が正なら項目 k の真のウェイトは、クリスプなウェイト w_{1k} よりも大きいと考えられ、負であれば小さいと考えられる。よって係数の $g_{ij}h_{kij}$ の符号はファジィ数の広がりの方角を示していると見ることができる。また、積の絶対値 $|g_{ij}h_{kij}|$ は影響の大きさとみなせる。ここで係数 g_{ij} は常に正であるので、実際は係数 h_{kij} の符号のみに注

意すればよい。

さらに、整合度C.I.が大きくなればあいまい性が増していることを考慮すると、積 $C.I. g_{ij} |h_{kij}|$ が項目 k のウェイトを表すファジィ数の（一対比較行列の成分 a_{ij} に関しての）広がり的大小と考えられる。よってあいまいさを含んだ次のウェイトが定義される。

定義（ファジィウェイト）

w_{1k} を項目 k のクリस्पなウェイトとし、 g_{ij}, h_{kij} をそれぞれ系1, 系2で計算された係数とする。一対比較行列の整合度が良くない場合($0.1 < C.I. < 0.2$)の項目 k のウェイトは、次のL-Rファジィ数で表現される。

$$\tilde{w}_k = (w_{1k}, \alpha_k, \beta_k)_{LR} \quad (13)$$

ここで

$$\alpha_k = C.I. \sum_i^n \sum_j^n s(-, h_{kij}) g_{ij} |h_{kij}|, \quad (14)$$

$$\beta_k = C.I. \sum_i^n \sum_j^n s(+, h_{kij}) g_{ij} |h_{kij}|, \quad (15)$$

$$s(+, h) = \begin{cases} 1, & (h \geq 0) \\ 0, & (h < 0) \end{cases}, \quad (16)$$

$$s(-, h) = \begin{cases} 1, & (h < 0) \\ 0, & (h \geq 0) \end{cases} \quad (17)$$

であり、この定義を用いることにより、各評価項目のファジィウェイトを計算することができる。

4.3. 代替案の総合ウェイト

評価項目のファジィウェイトと代替案の局所的なクリस्पなウェイトが計算されると、拡張原理に基づくファジィ数の演算により、最終的な代替案ウェイトの表現が可能となる。

通常、ファジィ数同士の演算では、回数を重ねるごとにあいまいさの広がりが大きくなっていくので、結果が分かりにくいものになる場合が多い。しかしここで計算された項目におけるファジィウェイトは和が1に規準化されているので、これをファジィ数の制約条件（相互作用）[8]と見ることにより、あいまいさの広がりが緩和される。

一般には制約条件を持つ変数の拡張原理による演算は容易ではない。しかし線形の場合には可能なことが示されている。特に、それぞれメンバシップ関数 $M_i (i = 1, \dots, n)$ によって特性づけられている変数 X_i が、

$$\sum_i^n X_i = 1 \quad (18)$$

（すべての M_i が正規三角型なら、そのコアを u_i としたとき $\sum_i^n u_i = 1$ ）という制約条件を持つと

き, a_i (シングルトン) を係数とする線形和

$$Z = \sum_i^n a_i X_i \quad (19)$$

の可能性分布 N の λ -カット集合 ($\lambda \in [0,1]$) の下限 $\inf N_\lambda$ と上限 $\sup N_\lambda$ は, M_i の λ -カット集合を $M_{i\lambda} = [b_i, B_i]$ とし, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ とすると

$$\inf N_\lambda = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} B_i a_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} B_i - \sum_{i=j+1}^n b_i \right) a_j + \sum_{i=j+1}^n b_i a_i \right\} \quad (20)$$

$$\sup N_\lambda = \min_j \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} b_i a_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} b_i - \sum_{i=j+1}^n B_i \right) a_j + \sum_{i=j+1}^n B_i a_i \right\} \quad (21)$$

となることが知られている [3]。

上記より, 本研究における総合代替案ウェイトのファジィ集合が計算される。簡単のために評価項目ファジィ数の両側の型関数を同じもの (L-Lファジィ数) とし, 代替案 t の項目 k に関する局所的クリスプウェイト $f_i(x_k)$ を

$$0 \leq f_i(x_1) \leq f_i(x_2) \leq \dots \leq f_i(x_n) \quad (22)$$

と仮定すると, 代替案 t の総合ウェイトは, やはりL-Lファジィ数となり, 次のように表現される。

$$\tilde{v}_t = (v_t, l_t, r_t)_{LL} \quad (23)$$

ここで

$$v_t = \sum_k^n w_{1k} f_i(x_k), \quad (24)$$

$$l_t = v_t - \inf \text{supp}(\tilde{v}_t), \quad (25)$$

$$r_t = \sup \text{supp}(\tilde{v}_t) - v_t \quad (26)$$

であり, この中の $\inf \text{supp}$, $\sup \text{supp}$ は台集合 (support set) の下限と上限で, それぞれ次のように計算される。

$$\inf \text{supp}(\tilde{v}_t) = \max_j \left[\sum_{i=1}^{j-1} (w_{1i} + \beta_i) f_i(x_i) + \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{j-1} (w_{1i} + \beta_i) - \sum_{i=j+1}^n (w_{1i} - \alpha_i) \right\} f_i(x_j) + \sum_{i=j+1}^n (w_{1i} - \alpha_i) f_i(x_i) \right] \quad (27)$$

$$\sup \text{supp}(\tilde{v}_t) = \min_j \left[\sum_{i=1}^{j-1} (w_{1i} - \alpha_i) f_i(x_i) + \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{j-1} (w_{1i} - \alpha_i) - \sum_{i=j+1}^n (w_{1i} + \beta_i) \right\} f_i(x_j) + \sum_{i=j+1}^n (w_{1i} + \beta_i) f_i(x_i) \right] \quad (28)$$

5. おわりに

通常, AHPではデータ行列が十分な整合性を持たないことが多いため, データ自体の信頼性の悪さがしばしば指摘される。本研究ではウェイトがあいまいさを含むものと仮定し, 感度分

析結果を用いたファジィ集合によるウェイト表現をする場合の代替案ウェイトの一算出法を提案した。この算出では制約条件に注目し、あいまいさの広がりが抑えられている。この表現により、結果にどのようなあいまいさが含まれているかを効果的に評価することが可能になると考えられる。

参 考 文 献

- [1] T.L.Saaty, : A scaling method for priorities in hierachical structures, *Journal of Mathematical Psycology*, vol. 15, no. 3, pp.234–281, 1977.
- [2] T.L.Saaty : *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [3] D.Dubois and, H.Prade : Additions of Interactive Fuzzy Numbers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, no. 4, Aug. 1981.
- [4] D.Dubois and, H.Prade : Ranking fuzzy numbers in setting of possibility theory, *Information Science*, vol. 30, pp. 182–224, 1983.
- [5] T.L.Saaty : Scaling the membership function, *European Journal of Operational Research*, vol. 25, pp. 320–329, 1986.
- [6] 刀根薫 : ゲーム感覚意思決定法, 日科技連, 1986.
- [7] D.Dubois and, H.Prade : Fuzzy numbers, *Analysis of Fuzzy Information*, vol. 1, pp. 214–263, 1987.
- [8] D.Dubois and, H.Prade : *Possibility Theory An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*,. Plenum Press, New York, 1988.
- [9] 大西真一, 今井英幸, 河口至商 : “ファジィ AHPにおける感度分析を用いた重要度の安定性の評価”, 日本ファジィ学会誌, vol. 9, no. 1, pp. 140–147, 1997.
- [10] 木下栄蔵 : 孫子の兵法の数学モデル, 講談社, 1998.
- [11] 木下栄蔵 (編著) : AHPの理論と実際, 日科技連, 2000.
- [12] 大西真一, 今井英幸, 山ノ井高洋 : “AHPの感度分析結果を用いたファジィウェイトについて”, 北海学園大学工学部研究報告, no. 29, pp. 239–248, .2001.
- [13] S.Ohnishi, H.Imai and T.Yamanoi : Weights representation of Fuzzy Decision Making by use of Sensitivity analysis, *Proceedings 9th IPMU*, 2002.
- [14] 大西真一, Didier Dubois, Henri Prade, 山ノ井高洋 : “ファジィ逆数行列を用いたAHPの整合度とウェイトについて”, 第20回ファジィシステムシンポジウム講演論文概要集, no. 4 F4–3, p70, 2004.
- [15] S.Ohnishi, D.Dubois and H.Prade : An Approach to the Analytic Hierarchy Process using Fuzzy Reciprocal Matrix, *Proceedings 10th IPMU*, 2004.
- [16] 大西真一, 山ノ井高洋 : “AHPにおけるデータの信頼性について”, 信学技報R2004–31, 2004.