

タイトル	解析的平均と内部性の要請：ジニ『平均論』（ミラノ, 1958年）によせて
著者	木村，和範
引用	季刊北海学園大学経済論集，57(2)：15-33
発行日	2009-09-25

《論説》

解析的平均と内部性の要請

—— ジニ『平均論』（ミラノ、1958年）によせて ——

木 村 和 範

はじめに

1. 平均の分類

- (1) 「現実的平均ないし実質的平均」と「計算的平均」
- (2) 「固定的平均」と「弛緩的平均」
- (3) 「解析的平均」と「非解析的平均」
- (4) 「一価的平均」と「多価的平均」
- (5) 「個別的平均」と「包括的平均」
- (6) 応用の場が「完全」な平均と「不完全」な平均

2. 「解析的平均」の諸形態

- (1) 「解析的平均」の形式上の差異
- (2) 「単純解析的平均」と「加重解析的平均」
- (3) 「単純解析的平均」と「加重解析的平均」の一般式

3. 「内部性の要請」を満たす「解析的平均」

- (1) 相加平均（算術平均） A
- (2) 相乗平均（幾何平均） G
- (3) 調和平均 H
- (4) 累乗平均 ${}^m A$
- (5) 累乗和平均 ${}^m T$
- (6) 指数平均 E
- (7) その他の「解析的平均」

むすび

はじめに

オスカル・キズィーニは各項の値が実数からなる系列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ において、 M が

$$f(M, M, \dots, M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

を満たすとき、その M を平均と定義した¹⁾。

これは、相加平均に典型的に見られる平均の代替（代表）機能に整合する定義である。

これにたいして、ジニは、その著『平均論』（ミラノ、1958年）²⁾において、古代ギリシアの数学理論（とりわけピュタゴラス学派の比例理論）を踏まえ、コーシーに依拠して平均を定義した。それによれば、平均は、系列を構成する諸項のもっとも小さい値の項ともっとも大きい値の項の間に落ち、したがって、それは、系列の各項を昇順（降順）に並べたとき、その両端に位置する項のいずれをも越えないという意味で、「内部性の要請（il requisito della internalità）」を満たす値であると定義されている。キズィーニの定義にしたがって(1)式の M を計算するとき、その値は「内部性の要請」を満たさないこともある。このことから、ジニはキズィーニの定義を批判した³⁾。そして、ジニは一般に(1)式の M を「平衡数（adeguati numerici）」と名付け、

1) Chisini, Oscar, “Sul concetto di media,” *Periodico Matematiche*, Volume IX, n. 2, 1° marzo 1929, p.108.

2) Gini, Corrado, *Le Medie*, in collaborazione con Gustavo Barbensi, Luigi Galvani, Stefania Gatti, Ernesto Pizzetti, Milano 1958 [Gini (1958)]. 式番号を除き、これ以降の（ ）内数字は、Gini (1958) の頁を示す。

3) 木村和範「平均概念について——ジニ『平均論』（ミラノ、1958年）断章——」『経済論集』（北海学園大学）第56巻第3号、2008年、139頁以下。

そのなかで「内部性の要請」を満たす M だけを平均値と規定した (134f.)。さらにまた、ジニは、(古典的比例と言われる3数の「連続的比例」とその延長線上にある) 全部で11個、見出されたピュタゴラス学派の「連続的比例」を拡張した。そして、そのそれぞれの「連続的比例」を構成する3項の中項が「内部性の要請」を満たす系列、すなわち「平均」をあたえる数の範囲を明らかにした⁴⁾。

このように、ジニのいわゆる「内部性の要請」は、平均概念を考察するときには枢要な位置を占めている。そこで、本稿では、ジニの「解析的平均」が満たすとされる「内部性の要請」の証明を中心論点に据えて、「解析的平均」の数学的性格を考察する。この目的のために、本稿は、ジニの見解を、1. 平均の分類、2. 「解析的平均」の諸形態、3. 「内部性の要請」を満たす「解析的平均」、の順に取り上げる。

1. 平均の分類

今日、平均は一般に、計算的平均と位置上の平均に分類されている。計算的平均はさらに①相加平均、②相乗平均、③調和平均に分類され、そのそれぞれには①単純平均と②加重平均がある。また、位置上の平均としては①中央値(メディアン)、②最頻値(モード)、③分位数(四分位数、五分位数、十分位数など)などがある。

これにたいして、ジニによる平均分類は多岐に渡っている。平均を分類するときに用いられる言葉のなかには、たとえ、今日われわれが使用するのと同じであっても、その意味内容が異なっているものがある。この点に留

意しつつ、以下ではコメントを付してジニの分類を見ることにする (63ff.)。

(1) 「現実的平均ないし実質的平均 (media reale o effettiva)」と「計算的平均 (media di conto)」 (63)

もとめられた平均値がもとの系列を構成する項の数量的規定性であるか、あるいはその平均値が現実には(あるいは可能性をもって)存在する場合の平均を「現実的平均ないし実質的平均」と言う。平均所得はこの一例である。

ジニは、この平均に「計算的平均」を対峙させた。平均世帯人員2.3人という数値は「計算的平均」の一例である。これをジニは「架空の平均 (medie fittizie)」とも言っている (444)。平均的な世帯人数が2.3人という数値は、計算上、得られるのであって、現実にはそのような世帯が存在するわけではないからである。しかし、1世帯あたりの平均的人数にかんする傾向的变化は世帯規模の変動テンポを示す指標たりうる。現実には2.3人の世帯が存在しないからと言って、この数値が実体的基礎をもたない空虚な数値として、これを排斥してよいことはない。ウスペンスキーの「4分の1頭の馬」は、「架空の平均」(ジニ)の背後にある事実を統計から読み解くことの必要性を示唆している。ここでは、これまで実体をもたないとしてその非科学性が論難されてきた虚構の総平均とジニの「架空の平均」との間には差異があることを指摘しておく。

(2) 「固定的 (fermo) 平均」と「弛緩的 (lasce) 平均」 (63)

「固定的平均」の典型としてジニが示しているのは

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad (2)$$

で定義される相加平均である。 $\bar{x}$ は系列を構成する項の値が変化すれば、それに応じて異

4) 木村和範「比例関係と平均——ジニ『平均論』(ミラノ、1958年)序章を中心に——」『経済論集』(北海学園大学)第57巻第1号、2009年[木村(2009)]。

なった値をとる。

これにたいして、系列を構成する項の最小値を x_m 、最大値を x_M とするとき、「両端項の総計の半分 (la semisomma degli estremi)」，すなわち

$$\overline{x_{mM}} = \frac{x_m + x_M}{2} \quad (3)$$

は、最小値 x_m と最大値 x_M の間に落ちる項の値の変化に不感的であり、 x_m と x_M の値が変わらない限り、両端項の内部にある項の値が変化する前と後において不変である。このような平均のことを、ジニは「弛緩的平均」と名づけている。この平均の例として、ジニは別の箇所ではメディアンやモードなどの「位置上の平均 (medie di posizione)」(これをジニは「非解析的平均」とも言っている。後述) を挙げている。そして、「弛緩的」という特性が、われわれのいわゆる計算的平均(ジニの言う「解析的平均」)とは対照的に区別される平均を特徴づけると考えている。しかし、位置上の平均と言えども、系列を構成する項の値に変化があれば、それは不変ではありえない。同様に(3)式で定義される平均(「両端項の総計の半分」)，すなわち最小項の値と最大項の値の相加平均 $\overline{x_{mM}}$ についても、最小値 x_m と最大値 x_M が変化して $x_m + x_M \neq \text{const.}$ になれば、両端項に挟まれた各項が変化すると否にかかわらず、 $\overline{x_{mM}}$ の値は変わってしまう。このことは(3)式が「固定的」特性をもっていて、「弛緩的」ではないことを意味する。このことがあるからであろうか、ジニは「両端項の総計の半分」 $\overline{x_{mM}}$ を「解析的平均」に分類している。しかし、そうすると、上で述べたように $\overline{x_{mM}}$ を「弛緩的」と特徴づけたことと齟齬を来すことになり、「解析的平均」＝「固定的」，「非解析的平均」＝「弛緩的」という構図は崩れてしまう。

このことは、「固定的」と見なされる相加平均 $\bar{x}$ ((2)式) についても指摘することがで

きる。すなわち、系列を構成する項の値が変化しても(項数 n が不変の場合には)，(2)式右辺の分子 $\sum_{i=1}^n x_i$ の値に変化がなければ、相加平均の値は不変である。したがって、このとき、相加平均 $\bar{x}$ は「固定的」ではなくて、系列の変化に不感的な「弛緩的」特性を示している。このように、通常の意味における相加平均 $\bar{x}$ を「固定的」と規定し、系列を構成する項の最小値と最大値の相加平均 $\overline{x_{mM}}$ を「弛緩的」と規定して、両者を識別してしまえば、少なくともそれぞれの特性と相反する事例が存在しうるのは説明しがたい。確かに、ジニ『平均論』のなかで指摘されているように、平均には「固定的」と「弛緩的」という2つの特性があって、これを対照的に捉えることは可能である。しかし、この分類基準が「解析的平均」と「非解析的平均」を識別するための基準たり得るかどうかについては、なお詰めた議論の余地がある。

(3) 「解析的 (analitiche) 平均」と「非解析的 (non analitiche) 平均」(64f.)

実数の系列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ にかんする「解析的平均」 M は、

$$M = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

という数式で表現される(逆は必ずしも真ならず)。われわれが計算的平均と命名している平均はこれである。

これにたいして、「非解析的平均」は、上述のような数式で表現されることはない。それは、諸項の全体で構成される単調数列 (successione monotona) を数直線上に配置したときに、その最小値と最大値を端点とする区間内の特定の位置に落ちる。このことから「非解析的平均」は「位置上の平均」とも言われている。しかし、「区間内の特定の位置に落ちる」という性質は「計算的平均」にも

見ることができる。

そのためであろうか、このことが述べられている箇所(64)には、「解析的平均」と「非解析的平均(位置上の平均)」についてのこのような区別は厳密ではないとして、「他の箇所」(58)を参照するよう注記されている。この「他の箇所」では、本項の(2)で述べた「固定的」と「弛緩的」という区別が述べられている。しかし、「固定的」と「弛緩的」という特徴は「解析的平均」と「非解析的平均」を識別するときの基準としては、そのままでは厳密さに欠ける。しかも、「非解析的平均」はたとえ(4)式のような数式では表現されないとしても、それをもとめるための計算式が存在しているのであるから、数式による表現可能性もまた「解析的平均」と「非解析的平均」とを識別する基準とはなりえない。

それでは、「解析的平均」と「非解析的平均」とはどのように区別されるのであろうか。この考察のために、ここでは、ジニが(4)式をもって「解析的平均」の抽象的な一般式と規定していることに着目する。これは一見すれば、平均の代替(代表)機能に照応している。しかし、この(4)式を適用しただけでは、 M は「内部性の要請」を満たさないこともある。このことから、ジニは(4)式を満たす M を「平衡数」と名づけ、そのうち「内部性の要請」を満たす M だけを平均と規定したことは、本稿の冒頭で述べた。このことをもってすれば、ジニの「解析的平均」は次の3条件をすべて満たさなければならないと考えることができる。すなわち、①系列にかんする関数が指定できること、②その関数を満たす実数 M が少なくとも1個はもとめられること⁵⁾、③その M が「内部性の要請」を満たしていることの3条件である。

「非解析的平均」もまた、度数分布に整理

した実数の系列における最小値 x_m と最大値 x_M の間にある値であるから、「内部性の要請」を満たしていることは明白であり、この意味で「平均」たりうる条件を満たしている。しかし、もとの系列をどのように階級区分するか(できるか)に応じて、その「平均」値は変動する。この性質は「解析的平均」には見ることができない。「非解析的平均」にあっては、階級幅を限りなく狭くして、連続量と見なしうるまでに階級区分する(できる)ときの系列についてもとめられる「平均」と幅を広くとった階級区分のもとでの「平均」とでは、たとえ、いずれもが「内部性の要請」を満たしていようと、その値は異なることがありうる。このことは、一般に位置上の平均と言われている「非解析的平均」の代表格であるメディアンやモードを考えてみれば明らかである。すなわち、「非解析的平均」は数直線上に並べた変量の領域内で、階級区分・階級間隔に応じて、数直線上を移動する。「非解析的平均」をこのような意味で用いれば、ジニがこの種の平均の特性を「弛緩的」と規定したことにはそれなりの理由があると思われるであろう。

要するに、変量を x 、その度数を f_{rq} 、度数分布における階級間隔を c とおいて、関数関係の表現形式を用いれば、「非解析的平均」 M_p は、

$$M_p = f(x, f_{rq}, c)$$

となり、同一の系列についてであろうとも、 c の大きさに応じてさまざまな M_p が得られる。これにたいして、「解析的平均」 M_a を

$$M_a = f(x, f_{rq})$$

と表記すれば、 M_p と M_a の違いは明瞭である(後掲の(10)式参照)。

5) M の値が単一か複数かの問題は次項で取り上げる。

(4) 「一価的 (univoche) 平均」と「多価的 (plurivoche) 平均」(65)

所与の系列についてもとめられる平均が単一か複数かを基準にして、平均はこのように分類される。たとえば、所与の系列にかんする相加平均の値は1個あって、1個しかない。これを「一価的平均」と言う。

これにたいして、系列 $(-9, -4, +4, +9)$ にかんする相乗平均 G は、

$$\begin{aligned} G &= \pm \sqrt[4]{(-4) \cdot (-9) \cdot (+4) \cdot (+9)} \\ &= \pm \sqrt[4]{1,296} \\ &= \pm 6 \end{aligned}$$

となって、 $+6$ と -6 の2つである。このようなケースの平均を「多価的平均」と言う。ただし、複数の値が算出されようとも、それが虚数であったり、「内部性の要請」を満たさない「平衡数」であったりすれば、それが平均と見なされないことは言うまでもない。

(5) 「個別的 (singole) 平均」と「包括的 (comprensive) 平均」(65)

ジニが「包括的平均」の例として挙げているのは、

$${}_m M = \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m}{n}} \quad (5)$$

である。この(5)式において、 $m=1$ のときは相加平均を示し、 $m=2$ のときは平方平均を示し、さらに $m=3$ のときは立方平均を示すというように、(5)式はそれぞれの平均の一般式としての機能を果たしている⁶⁾。このよ

うな場合、その一般式を「包括的平均」という。

これにたいして、原系列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の相加平均 $\bar{x}$ を示す

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad (2)[再掲]$$

および、相乗平均 G を示す次式

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (6)$$

そして、調和平均 H を示す次式

$$H = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \quad (7)$$

などは、特定の平均を限定的に規定している。このために、これらの計算式であたえられる平均を「個別的的平均」と言う。

(6) 応用の場が「完全 (complete)」な平均と「不完全 (incomplete)」な平均 (65f.)

系列を構成する任意の実数にたいして解析的平均の公式を適用した結果、すべての「平衡数」が「内部性の要請」を満たしているとき、すなわち、すべての「平衡数」が平均であるとき、それを「完全な応用の場をもつ平均 (medie con campo di applicazione completo)」と言う。相加平均はこの一例である。任意の実数の系列について、その相加平均は1個あって、1個しかないが、

したがって、 $m=-1$ のとき、(5)式は調和平均の計算式となる (76)。

また、(5)式において $m \rightarrow 0$ のとき、 ${}_m M$ は相乗平均の計算式と一致すること、すなわち、

$$\lim_{m \rightarrow 0} \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^m}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

が O. ダンケルによって証明されている (Dunkel, O., "Generalized Geometric Means and Algebraic Equations," *Annals of Mathematics*, Vol. 11, 1909-10)。

6) (5)式において、 $m=-1$ のときは、次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^{-1}M &= \sqrt[-1]{\frac{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \cdots + x_n^{-1}}{n}} \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad (2) \text{ [再掲]}$$

はそのような値をあたえるからである (この証明は 3 (1) [後述])。

これにたいして、解析的平均の公式をあてはめた結果、「内部性の要請」を満たさない値が得られることもあるとき、それを「不完全な応用の場をもつ平均 (medie con campo di applicazione incompleto)」と言う。ジニは、この一例として反調和平均² T を挙げている。反調和平均の公式によれば、2 つの実数 -3 と 4 にかんする² T は

$$\begin{aligned} {}^2T &= \frac{(-3)^2 + 4^2}{-3 + 4} \\ &= 25 \end{aligned} \quad (8)$$

であたえられる (60)。この値は系列を構成する項の最大値 4 を超えている。したがって、25 は「平衡数」ではあっても、「内部性の要請」を満たす「平均」ではない。このことは、反調和平均の公式が (「内部性の要請」を満たすという意味での) 平均をあたえるには、当該公式の適用対象たる系列がしかるべき条件を満たしていなければならないことを示唆している (数学注)。

以上から、平均公式の適用にあたって、系列を構成する実数の領域に制約がある (「不完全」な平均) か、いな (「完全」な平均) か (完全性) が判定される。「解析的平均」が「内部性の要請」を満たしていることはいかにして証明されるか、またそのときの条件は何であるかについては、3 節 (「内部性の要請」を満たす「解析的平均」) の課題とする。その前に、ジニの「解析的平均」はどのような形式で表現されるかを見ておくことにする。

2. 「解析的平均」の諸形態

ジニは、平均をさまざまな次元で分類した

が、諸分類基準の優先順位については明言していない。しかし、ここでは、ジニ『平均論』は全体を通じて、「解析的平均」と「非解析的平均」に多くの紙幅を充てていること、とりわけ、「解析的平均」の数学的性質の考察に重点をおいていることを勘案する。このために、以下では、「解析的平均」の諸形態とその特質にかんするジニの見解を取り上げることにする。

(1) 「解析的平均」の形式上の差異

ジニは 1938 年に「平均の包括的公式について」⁷⁾ というタイトルの論文を公表した。この論文は、「解析的平均」の諸形態を考察する上で不可欠な概念を提示している。そのため、この 1938 年論文における主張の一部は、1958 年に刊行されたジニ『平均論』で「解析的平均」の公式を分類するときに採用されている。

周知のように、指数関数 $y = a^x$ (ただし、 $a > 0$, $a \neq 1$) において a を底と言い、 x を指数と言う。平均をもとめるべき系列を構成する項の値が、指数形式の①底に置かれるか、②指数に置かれるか、③底と指数の両方に置かれるかによって、「解析的平均」は 3 種類に分類される。①の平均を「底平均 (medie basali)」, ②の平均を「指数平均 (medie esponenziali)」, ③の平均を「底 - 指数平均 (medie baso-esponenziali)」と言う。このうち、③については 1938 年論文において「私の思い違いでなければ (se non erro)」という留保をつけつつも、それがジニの創始になることを示唆している⁸⁾。

1938 年論文における見解を踏まえたジニ『平均論』で例示されているそれぞれの平均は次のとおりである (64f.)。

7) Gini, C., “Di una formula comprensiva delle medie,” *Metron*, Vol. XIII, 1938 [Gini (1938)].

8) Gini (1938), p.3.

① 底平均⁹⁾

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

ここに前者は相加平均，後者は相乗平均である¹⁰⁾。

② 指数平均

$$c^E = \frac{c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_n}}{n}$$

③ 底-指数平均

$$y^y = \frac{x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \cdots + x_n^{x_n}}{n}$$

(2) 「単純解析的平均 (medie analitiche semplici)」と「加重解析的平均 (medie analitiche ponderate (o pesate))」

系列を構成する各項の値 x が同一の値となる項について，その項数（度数）を一般に f で表すとき¹¹⁾，その系列は次のように表記される場合がある。

$$\begin{array}{cc} x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & f_k \end{array} \quad (9)$$

ただし， $n = \sum_{i=1}^k f_i$

9) ジニによれば，底平均は「それを表現する数式において，諸項のすべてが分子だけにしか見られないか，あるいは分子と分母の両方に見られるか」に応じて，「単葉的平均 (media monoplane) 平均」と「双葉的平均 (media biplane)」に分類される。たとえば相加平均は，変量が分子にのみ現れるので，「単葉的」である (2)式参照)。これにたいして，反調和平均では，変量が分子と分母の両方に出現するので，「双葉的」である (8)式参照)。

10) 相乗平均 A を $G = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ と変形すれば， A が底平均であることはより明確になる。

11) ジニは f_i を p_i とおいているが，ここでは表記を慣例に従う。

系列が(9)式のように表されるとき，その系列の総体には，同一の値をとる項が複数存在（重複）している（任意の i について， $f_i \geq 2$ が成立する）。この意味で，ジニは系列(9)式を「重複的総体 (insieme con ripetizione)」と名づけ，とくに x_i が大小の順に配列されているとき，その系列を「度数系列 (seriazione di frequenza)」と言っている (66)。系列が(9)式であたえられるとき，平均の一般式は

$$M = f(x_1, x_2, \cdots, x_k, f_1, f_2, \cdots, f_k) \quad (10)$$

になる。このように変量 x_i が度数 f_i とともにあたえられている場合の平均を「加重解析的平均」と言う。

これにたいして，実数の系列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ にかんする「解析的平均」の一般式

$$M = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (4) \text{ [再掲]}$$

から算出される値で，「内部性の要請」を満たしている数値を「単純解析的平均」と言う。

(3) 「単純解析的平均」と「加重解析的平均」の一般式

ジニによれば，すべての「単純解析的平均」が「加重解析的平均」と対応しているわけではない。ここでは，「単純平均」と「加重平均」とが対応しているとされる平均だけを表にまとめる (表1)¹²⁾。

12) 加重平均をもたない「解析的平均」はいくつかあるが，ここではその一例として「組合せ平均 (media combinatoria)」だけを取り上げる。平均をもとめるべき系列が n 個の項からなっているとす。このとき，この系列から c 個 ($c \leq n$) の項を取り出し，すべての組合せについてその積をもとめ，さらにその総和を組合せの場合の数で除し，その c 乗根をもとめる。これが組合せ平均である。ジニが挙げている系列 (2, 4, 5, 10) を用いて，このことを例解する。この4個

表 1 「単純解析的平均」と「加重解析的平均」の対照 (つづく)

名 称	単純解析的平均 (n は総度数)	加重解析的平均 (f_i を変量 x_i の度数とすると、総度数 N は $N = \sum_{i=1}^k f_i$ となる。なお、以下では $w_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$ とおく (w はウェイト)。
相加平均 (算術平均) (A)	$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$A = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$ $A = \sum_{i=1}^k x_i w_i$
相乗平均 (幾何平均) (G)	$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$ $\log G = \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n}$	$G = \sqrt[f_1 + f_2 + \cdots + f_k]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \cdots \cdot x_k^{f_k}}$ $= \left(\prod_{i=1}^k x_i^{f_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^k f_i}}$ $G = \prod_{i=1}^k x_i^{w_i}$
調和平均 (H)	$H = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$ $= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$ $= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}$	$H = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k x_i^{-1} \cdot f_i}$ $H = \frac{1}{\sum_{i=1}^k x_i^{-1} \cdot w_i}$
平方平均 (2A)	${}^2A = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$ $= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$	${}^2A = \left(\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \right)^{\frac{1}{2}}$ ${}^2A = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot w_i \right)^{\frac{1}{2}}$
立方平均 (3A)	${}^3A = \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{n}}$ $= \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n}}$	${}^3A = \left(\frac{\sum_{i=1}^k x_i^3 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \right)^{\frac{1}{3}}$ ${}^3A = \left(\sum_{i=1}^k x_i^3 \cdot w_i \right)^{\frac{1}{3}}$
4 乗平均 (4A)	${}^4A = \sqrt[4]{\frac{x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4}{n}}$ $= \sqrt[4]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{n}}$	${}^4A = \left(\frac{\sum_{i=1}^k x_i^4 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \right)^{\frac{1}{4}}$ ${}^4A = \left(\sum_{i=1}^k x_i^4 \cdot w_i \right)^{\frac{1}{4}}$

の項からなる系列について 3 個ずつ組み合わせれば、(2, 4, 5), (2, 4, 10), (2, 5, 10), (4, 5, 10) の 4 (= ${}_4C_3$) とおりある。したがって、このときの組合せ平均 M^3 は

$$M^3 = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 4 \cdot 5 \cdot 10}{{}_4C_3}}$$

$$= 4.718$$

である。この例では、3 個ずつ組み合わせられて

いることから、 M^3 は「3 次の組合せ平均 (la media combinatoria del 3°)」と言われている (79)。「 c 次の組合せ平均」の一般式は

$$M^c = \sqrt[c]{\frac{\sum_{i=1}^{nC} P_i^c(x_i)}{nC}}$$

である。

表1 「単純解析的平均」と「加重解析的平均」の対照（つづき）

累乗平均 (${}^m A$)		${}^m A = \sqrt[m]{\frac{x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m}{n}}$ $= \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^m}{n}}$ ただし, $m \neq 0$	${}^m A = \left(\frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \right)^{\frac{1}{m}}$ ${}^m A = \left(\frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot w_i}{\sum_{i=1}^k w_i} \right)^{\frac{1}{m}}$
反調和平均 (${}^2 T$)		${}^2 T = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i}$ ここに, $\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$	${}^2 T = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}$ ${}^2 T = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot w_i}{\sum_{i=1}^k x_i \cdot w_i}$
累乗和平均 (${}^m T$)		${}^m T = \frac{x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m}{x_1^{m-1} + x_2^{m-1} + \cdots + x_n^{m-1}}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^m}{\sum_{i=1}^n x_i^{m-1}}$ ただし, x は正の実数	${}^m T = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k x_i^{m-1} \cdot f_i}$ ${}^m T = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot w_i}{\sum_{i=1}^k x_i^{m-1} \cdot w_i}$
指数平均 (E)		$c^E = \frac{c^{x_1} + c^{x_2} + \cdots + c^{x_n}}{n}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n c^{x_i}}{n}$ ただし, $c > 0, c \neq 1$	$c^E = \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$
底 - 指数平均 (y)		$y^y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{x_i}}{n}$	$y^y = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$
累乗根平均 (β)		$c^{\frac{1}{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n c^{\frac{1}{x_i}}}{n}$	$c^{\frac{1}{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^k c^{\frac{1}{x_i}} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$
底 - 累乗根平均 (α)		$\alpha^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{x_i}}}{n}$	$\alpha^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^{\frac{1}{x_i}} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$
三角法平均	正弦平均	$\sin \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin x_i}{n}$ $\bar{x} = \arcsin \frac{\sum_{i=1}^n \sin x_i}{n}$	$\bar{x} = \arcsin \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot \sin x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$
	余弦平均	$\cos \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos x_i}{n}$ $\bar{x} = \arccos \frac{\sum_{i=1}^n \cos x_i}{n}$	$\bar{x} = \arccos \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot \cos x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$

(訳注) * $m \rightarrow 0$ のとき相乗平均, $m=1$ のとき相加平均, $m=2$ のとき平方平均, $m=3$ のとき立方平均, $m=4$ のとき4乗平均。

** $m=1$ のとき相加平均, $m=0$ のとき調和平均, $m=2$ のとき反調和平均。

*** $c=0$ のとき $0^E = 0$ となり, E は不定。 $c=1$ のとき $1^E = 1$ となり, この場合も E は不定。

(出所) Gini, Corrado, *Le Medie*, Milano 1958, pp.63ff. e pp.93ff. にもとづく。

3. 「内部性の要請」を満たす「解析的平均」

前節末尾に、「単純平均」と「加重平均」のいずれについても一般式があるとされる「解析的平均」にかんする表を掲げた (表 1)。この「解析的平均」のなかには、反調和平均のように必ずしも「内部性の要請」を満たさない数値をあたえる計算式がある。このことはすでに述べた。ここでは、表 1 に表章されている「解析的平均」のなかで、所定の条件¹³⁾のもとで「内部性の要請」を満たすことが証明されている 6 種類の平均 (①相加平均 A , ②相乗平均 G , ③調和平均 H , ④累乗平均 ^{m} A , ⑤累乗和平均 ^{m} T , ⑥指数平均 E) をとりあげる (134ff.)¹⁴⁾。

「内部性の要請」を満たしていることにかんするジニ『平均論』における証明はすべて「加重平均」を前提にしている。その理由は明確ではないが、平均をもとめるべき系列を構成する項の値がすべて異なっている系列、すなわち、

$$\text{系列 I : } x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n$$

よりも、同じ値の項が存在することを前提とした系列、すなわち、

$$\text{系列 II : } x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_i \leq \cdots \leq x_n$$

のほうが一般的であり、系列 I は系列 II の特殊なケースと見なされていると考えられる。系列 II においては同一の値をとる項が存在し、

それらの項を数え上げ、その項数を度数とすれば、系列 II について計算される平均は一般に「加重平均」となるからであろう。

なお、ここで取り上げる証明にかんして、ジニ『平均論』は前掲した対照表 (表 1) に記載した「加重平均」の一般式のうちウェイト (w) を用いた数式によっている。しかし、度数 (f) を使用する証明のほうが分かりやすいので、ジニの趣旨は生かすが、度数を用いた数式により、適宜、補筆する。

(1) 相加平均 (算術平均) A (135f.)

一般に、系列 $(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_k)$ の各項に対応した度数を $f_1, f_2, \cdots, f_i, \cdots, f_k$ とすると、総度数 N は

$$N = \sum_{i=1}^k f_i \quad (11)$$

である。

系列を構成する項の最小値 x_1 を、総度数 N と同数個、加えると Nx_1 を得る。次に、すべての項の値を合計すれば、 $\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i$ となる。そして、系列を構成する項の最大値 x_k を、 x_1 と同様に総度数 N と同数個、加えると Nx_k となる。これらの大小関係は

$$Nx_1 \leq \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i \leq Nx_k$$

となる。ここで、上式を N で割れば、

$$x_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}{N} \leq x_k$$

ゆえに

$$x_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq x_k$$

13) これら 6 種類の平均のうち、相加平均 (算術平均) A だけは任意の実数の系列について、無条件で単一の実数 (一価的平均) をあたえる (後述, 3 (1) 参照)。

14) 本稿で取り上げる 6 種類の平均以外にも、ジニは「内部性の要請」を満たす平均として 3 種類の「組合せ平均」を取り上げているが^{140ff.}、本稿ではひとまず考察の対象を「単純平均」と「加重平均」の対照表の範囲に限定する。

となるが、 $A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$ により、

$$x_1 \leq A \leq x_k$$

を得る。

q. e. d.

なお、上の大小関係は系列を構成するすべての項の値が同符号であるときに成立するが、それだけではない。 $x_{s-1} \leq 0$, $x_s > 0$ (ただし、 $2 \leq s \leq k$) のときにも、 $x_1 \leq A \leq x_k$ は成立する。すなわち、すべての実数について、相加平均 A は「内部性の要請」を満たし、かつ、 A の値は、任意の系列について 1 個あって、1 個しかない。この特性は、以下に取り上げるさまざまな「解析的平均」とは異なる相加平均の特徴である。

(2) 相乗平均（幾何平均） G (136f.)

系列を構成する最小値 x_1 を N 乗すると（ここに N は総度数）、 x_1^N を得る。同様に最大値 x_k も N 乗すると、 x_k^N を得る。そして、各項の値 x_i を f_i 乗し、その積をもとめ ($x_i^{f_i}$)、それをすべて掛け合わせれば、 $x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}$ を得る。

ここで、 $x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k} > 0$ と仮定する。このとき、 x_1^N , $x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}$, x_k^N の大小関係は

$$x_1^N \leq x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k} \leq x_k^N$$

となる。

ところで、

$$N = \sum_{i=1}^k f_i \quad (11) \text{ [再掲]}$$

であるから、上の大小関係は

$$x_1^{\sum_{i=1}^k f_i} \leq x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k} \leq x_k^{\sum_{i=1}^k f_i}$$

と書くことができる。

ここで、上式について $\sum_{i=1}^k f_i$ 乗根をもとめれば、

$$x_1 \leq \sqrt[\sum_{i=1}^k f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}} \leq x_k$$

を得る。

$$\begin{aligned} G &= \sqrt[\sum_{i=1}^k f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}} \\ &= \sqrt[\sum_{i=1}^k f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}} \end{aligned}$$

なので、 $x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k} > 0$ のもとでは

$$x_1 \leq G \leq x_k$$

である。

q. e. d.

ジニの証明は以上の通りであるが、相乗平均 G の一般式

$$G = \sqrt[\sum_{i=1}^k f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}}$$

の対数をとっても、 G が「内部性の要請」を満たしていることは証明可能である。以下に別解を掲げる。

相乗平均の一般式について、その対数をとれば、

$$\begin{aligned} \log G &= \log \left(\sqrt[\sum_{i=1}^k f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}} \right) \\ &= \log \sqrt[\sum_{i=1}^k f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^k f_i} \log (x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k}) \end{aligned}$$

となるが、 $x_i > 0$ のときには、

$$\begin{aligned} \log G &= \frac{1}{\sum_{i=1}^k f_i} (\log x_1^{f_1} + \log x_2^{f_2} + \cdots + \log x_i^{f_i} + \cdots + \log x_k^{f_k}) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^k f_i} (f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \cdots + f_i \log x_i + \cdots + f_k \log x_k) \end{aligned}$$

と整理できる。

ここで、 $X_i = \log x_i$ とおくと、上式は

$$G = \frac{1}{\sum_{i=1}^k f_i} \sum_{i=1}^k X_i f_i$$

となる。これは $X_i = \log x_i$ の度数を f_i とする加重相加平均であるから、前項の証明により、

$$X_1 \leq \log G \leq X_k$$

を導くことができる。したがって、

$$\log x_1 \leq \log G \leq \log x_k$$

$$\therefore x_1 \leq G \leq x_k$$

が証明される。

q. e. d.

なお、この別解ではすべての項が真数条件 ($x_i > 0$) を満たしていることを要するので、ジニの証明で用いられた条件 ($x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdots x_i^{f_i} \cdots x_k^{f_k} > 0$) が満たされる場合よりも、相乗平均の計算式の適用の場は狭まる¹⁵⁾。

(3) 調和平均 H (137)

これにかんしては、相加平均が「内部性の要請」を満たしていることを証明したときと同様に考えればよい。しかし、系列を構成する各項の逆数をもとめ、その逆数の相加平均の逆数が調和平均であることを、あえてここで確認しておく。

系列を構成する項の値が同符号の場合、もとの系列の最小値 x_1 の逆数 $\frac{1}{x_1}$ が最大値となり、同じ系列の最大値 x_k の逆数 $\frac{1}{x_k}$ は最小値であることが分かる。これらの逆数をそれぞれ、 N 個、加えると $N \cdot \frac{1}{x_1}$ と $N \cdot \frac{1}{x_k}$ を得る (ここに N は総度数)。他方で、すべての項の

逆数を合計したとき、その和は $\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i$ である。このとき、これらの大小関係は

$$N \cdot \frac{1}{x_1} \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i \geq N \cdot \frac{1}{x_k}$$

となる。

ここで、上式を N で割れば、

$$\frac{1}{x_1} \geq \frac{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i}{N} \geq \frac{1}{x_k}$$

を得る。この上式について逆数をとれば、大小関係が逆転するから、

$$x_1 \leq \frac{N}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i} \leq x_k$$

となる。

$$N = \sum_{i=1}^k f_i \quad (11) \text{ [再掲]}$$

であるから、

$$x_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i} \leq x_k$$

となるが、 $H = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i}$ により、

$$x_1 \leq H \leq x_k$$

を得る。

q. e. d.

以上は、ジニ『平均論』における証明であるが、それを補足するために、以下では $x_1 < 0$, $x_k > 0$ の場合に、 $x_1 \leq H \leq x_k$ が成立するかどうかを考察する。そのために、 $x_{s-1} < 0$, $x_s > 0$ とする (ただし、 $2 \leq s \leq k$)。

15) 対数を用いた証明を採用すれば、1(4)で相乗平均をもとめた数値例 ($-4, -9, +4, +9$) については、相乗平均は、計算不能となる。

調和平均

$$H = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i}$$

の分母は

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i + \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i \quad (12)$$

と分解できるが、明らかに

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i + \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i \neq 0$$

である。この(12)式の値は、 $\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i < 0$ と $\sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i > 0$ ($\because x_1 < 0, x_k > 0$) の相対的な関係によって、次の(13)式と(14)式の2つのケースが考えられる。

$$\text{ケース 1 : } \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i + \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i < 0 \quad (13)$$

$$\text{すなわち, } \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i < -\left(\sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i\right),$$

$$\text{よって } \left|\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i\right| > \left|\sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i\right|$$

$$\text{ケース 2 : } \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i + \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i > 0 \quad (14)$$

$$\text{すなわち, } \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i > -\left(\sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i\right),$$

$$\text{よって } \left|\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i\right| < \left|\sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i\right|$$

上の2つのケースのうち、調和平均 H の計算式においてその分母が負 ((13)式) の場合には、 $H < 0$ である。このとき、 $x_k > 0$ という前提のもとでは、明らかに、

$$H < x_k$$

である。しかし、このときには、 $x_1 < 0$ であり、かつ $H < 0$ であるから、 x_1 と H についてその大小関係を確定できず、つねに $x_1 < H$ が成立するという事にはならない。したがって、一般に $x_1 < H < x_k$ が成立すると

は言えない。

他方で、調和平均 H の計算式においてその分母が正 ((14)式) の場合には、 $H > 0$ となる。このとき、 $x_1 < 0$ という前提のもとでは、

$$x_1 < H$$

である。しかし、 $x_k > 0$ の場合には $H > 0$ でもあり、このときには x_k と H についてその大小関係を確定できず、つねに $H < x_k$ が成立するわけではない。したがって、一般に $x_1 < H < x_k$ が成立するとは言えない。

以上の考察により、 $x_1 < 0, x_k > 0$ の場合には、つねに $x_1 \leq H \leq x_k$ が成立する（「内部性の要請」が満たされる）とは言えないことが証明される。 *q. e. d.*

これまでの考察をまとめた表を次頁に掲げる (表2)。

(4) 累乗平均 ${}^m A$ (138f.)

$m \leq 0$ のとき、もとの系列については次式を得る (ただし、 $x_i > 0, x_i \neq 1$)。

$$\sum_{i=1}^k x_1^m \cdot f_i \leq \sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i \leq \sum_{i=1}^k x_k^m \cdot f_i$$

これを

$$N = \sum_{i=1}^k f_i \quad (11) \text{ [再掲]}$$

で割れば、

$$\frac{\sum_{i=1}^k x_1^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_k^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

を得るが、これは

$$\frac{x_1^m \sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{x_k^m \sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

となり、結局、次式のように整理される。

表 2 調和平均の公式と内部性の要請

調和平均 (H) の符号 $H = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i}$ $= \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i + \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i}$ (ただし, $2 \leq s \leq k$)	系列 $x_1 < 0, x_k > 0$	系列が左欄のときの H と 系列の最小値 x_1 , 最大値 x_k の大小関係	内部性の要請を 満たす場合 (太字強調)
$H < 0$, すなわち $\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i + \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i < 0$	$\left \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i \right > \left \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i \right $	$x_1 < 0$ $H < x_k$ $(H < 0)$	$x_1 < H$ のとき, $x_1 < H < 0 < x_k$
			$H < x_1$ のとき, $H < x_1 < 0 < x_k$
$H > 0$, すなわち $\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i + \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i > 0$	$\left \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{x_i} \cdot f_i \right < \left \sum_{i=s}^k \frac{1}{x_i} \cdot f_i \right $	$x_k > 0$ $x_1 < H$ $(H > 0)$	$H < x_k$ のとき, $x_1 < 0 < H < x_k$
			$x_k < H$ のとき, $x_1 < 0 < x_k < H$

$$x_1^m \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq x_k^m$$

ここで,

$$\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i \geq 0$$

なので, 上に示した大小関係にかんする数式
 の m 乗根を

$$x_1 \leq \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}} \leq x_k$$

ともとめることができる。ここに,

$${}^m A = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}}$$

であるから,

$$x_1 \leq {}^m A \leq x_k$$

となる。

q. e. d.

(5) 累乗和平均 ${}^m T$ (139f.)

累乗和平均 ${}^m T$ は

$${}^m T = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^m \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k x_i^{m-1} \cdot f_i}$$

である。これを変形すれば,

$${}^m T = \frac{\sum_{i=1}^k x_i (x_i^{m-1} \cdot f_i)}{\sum_{i=1}^k x_i^{m-1} \cdot f_i}$$

を得る。上式は, この x_i をウェイト ($x_i^{m-1} \cdot f_i$)
 で加重したときの x_i の相加平均であると見
 なすことができる。したがって, 累乗和平均
 ${}^m T$ は, 加重相加平均 A と同様に, 「内部性
 の要請」を満たし,

$$x_1 \leq {}^m T \leq x_k$$

が成立する。

q. e. d.

(6) 指数平均 E (139f.)

指数平均 E の一般式 (加重平均) は

$$c^E = \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \quad (15)$$

である。また、

$$c^{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_1} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}, \text{ かつ } c^{x_k} = \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_k} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

である。

以下、 $c > 1$ と $0 < c < 1$ に分けて考察する。

$c > 1$ のとき、

$$\frac{\sum_{i=1}^k c^{x_1} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_k} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

が成立し、

$$\frac{c^{x_1} \sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq \frac{c^{x_k} \sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

となり、結局、

$$c^{x_1} \leq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \leq c^{x_k}$$

と整理され、

$$c^{x_1} \leq c^E \leq c^{x_k}$$

を得る。

よって、

$$x_1 \leq E \leq x_k$$

である。

他方で、 $0 < c < 1$ のとき、

$$\frac{\sum_{i=1}^k c^{x_1} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_k} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

が成立し、

$$\frac{c^{x_1} \sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \geq \frac{c^{x_k} \sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

となり、結局、

$$c^{x_1} \geq \frac{\sum_{i=1}^k c^{x_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \geq c^{x_k}$$

と整理され、

$$c^{x_1} \geq c^E \geq c^{x_k}$$

を得る。

ところが、 $0 < c < 1$ なので、

$$x_1 \leq E \leq x_k$$

となる。

以上から、指数平均 E は $c > 0$, $c \neq 1$ のときに、「内部性の要請」を満たしていることが証明された。 *q. e. d.*

なお、上で累乗和平均 mT を考察したときと同様に考えても、指数平均 E が「内部性の要請」を満たすことは証明可能である。上掲した指数平均 ((15)式) は、 c ($c > 0$, $c \neq 1$) の x_i 乗 (c^{x_i}) について、そのウェイトを f_i とする加重相加平均と見なすことができるからである (80)。

(7) その他の「解析的平均」

単純平均と加重平均の両方について一般式があたえられている「解析的平均」のなかで、「内部性の要請」を満たすとされる平均にかんして、その証明があたえられているのは、前項までに取り上げた6種類の平均である。ここでは、ジニ『平均論』を補完する目的で、①「底-指数平均」 y 、②「累乗根平均」 β 、③「底-累乗根平均」 α 、④「正弦平均」 $\sin \bar{x}$ 、⑤「余弦平均」 $\cos \bar{x}$ においても「内部性の要請」が満たされていることを指摘しておく。

表3 変量と度数

平 均	変 量	度 数
①底-指数平均 (y)	x_i^y	f_i
②累乗根平均 (β)	$c^{\frac{1}{x_i}}$	f_i
③底-累乗根平均 (α)	$x_i^{\frac{1}{\alpha}}$	f_i
④正弦平均 ($\sin \bar{x}$)	$\sin x_i$	f_i
⑤余弦平均 ($\cos \bar{x}$)	$\cos x_i$	f_i

表1から、それぞれの平均にかんする変量と度数を抜き出して、まとめれば上のようなになる(表3)。これらの平均についてその変量を一般に X_i とおけば、いずれの平均についても、加重相加平均として表現可能であることが表1の一般式から分かる。

加重相加平均 $\bar{X}$ においては、系列 $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_i \leq \dots \leq X_k$ について一般に

$$X_1 \leq \bar{X} \leq X_k$$

が成立するので、上記5種類の変量にかんする「解析的平均」も「内部性の要請」を満たしていることが証明される。 *q. e. d.*

む す び

ジニ『平均論』は、古代ギリシアの比例理論に端を発する平均の数学理論を論じた著書である。変量が確率変数ではない実数にかんする考察を、その特徴として挙げることができる。ジニは、平均を定義するにあたってコーシーの定義を基本に据えて、平均には、系列を構成する項の最小値と最大値の間にあるという意味で、「内部性の要請」を満たしていることが重要であると考えた。とりわけ、変量の関数として特定される「解析的平均」(単純と加重とを問わない)においては、この「内部性の要請」を無視すれば、平均とは言えない値までが平均と見なされてしまうことに注意を喚起した。このことは、反調和平均にかんする数値例が示すとおりである。

本稿では、ジニ『平均論』で取り上げられ

た「解析的平均」のなかから、「内部性の要請」を満たす平均の一部を取り上げた。そして、諸形態をとる「解析的平均」について、それらが「内部性の要請」を満たしているかどうかにかんするジニの証明を補強しつつ、跡づけた。

その結果、ジニ『平均論』では、一般に「内部性の要請」を満たす平均が(本稿では取り上げなかった「組合せ平均」を別とすれば)、6種類(①相加平均 A 、②相乗平均 G 、③調和平均 H 、④累乗平均 ${}^m A$ 、⑤累乗和平均 ${}^m T$ 、⑥指数平均 E) であるとされていることが明らかになった。これらの平均のうち、この国でもその数理的意味が明確になって、統計利用の分野で応用に供されているのは、①相加平均、②相乗平均、③調和平均である。

④累乗平均 ${}^m A$ は、特殊なケースについてのみ、その数理的意味が明らかになっているにすぎない。すなわち、 $m \rightarrow 0$ のとき、 ${}^{m \rightarrow 0} A$ は②相乗平均と一致し、 $m=1$ のとき、 ${}^1 A$ は、①相加平均と一致する。また、変量 x_i を平均偏差 ($x_i - \bar{x}$) と置き換えて(ここに $\bar{x}$ は相加平均)、 $m=2$ とすると、 ${}^2 A$ は標準偏差を意味する。

さらにまた、⑤累乗和平均 ${}^m T$ も特殊なケースについて、その数理的意味が明らかになっている。すなわち、 $m=0$ のとき、 ${}^0 T$ は③調和平均に一致し、 $m=1$ のとき、 ${}^0 T$ は①相加平均に一致する。

ジニは、⑥指数平均が数式の上では相加平均の形式をとっていると指摘している。しかし、その実質的意味にかんする指摘は見当らない。それにかんする考察は、ジニが読者に課した課題であると解釈したい。

本稿を閉じるにあたって、最後に、「解析的平均」の計算式によって「内部性の要請」を満たす数値(平均)が、一般的にあたえられるとは言い難いことを、改めて強調しておく。所与の数値系列にたいしてさまざまな平均にかんする計算式を適用する場合、その結

果数字が「内部性の要請」を満たしているかどうかを見極める必要があることを、ジニ

『平均論』は示唆している。

（数学注）

ジニ『平均論』は3数の間の比例関係を論じている箇所（18f.）で、「反調和的比例式」

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{a}$$

から誘導される

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}$$

が「内部性の要請」を満たすかどうかを4つの場合に分けて考察した結果を表にまとめている。この要約表には、反調和的比例式だけでなくさまざまな比例式について b が中項であるかどうかを検討した結果がまとめられている（木村（2009），表5参照）。しかし，証明はなされていない。そこで，以下では，ジニの要約表から反調和的比例式だけを取り上げて，「内部性の要請」にかんする証明を示すことにする

（付表）。考察を反調和的比例式に限定するのは，それが，ジニのキズィーニ批判において重要な役割を果たしているからに他ならない。

下の付表に見るように，ジニ『平均論』における反調和平均にかんする「内部性の要請」についての指摘は，古代ギリシア（ピュタゴラス学派）の「連続的比例」に限定されている。そこで，反調和平均² T の公式が一般的に「内部性の要請」を満たす値をあたえるとは言い難いこと，すなわち「内部性の要請」を満たすには条件が必要であること述べる。ただし，①2数 (x_1, x_2) だけの系列については，付表における証明が妥当するので，以下では，② n 個 $(n \geq 3)$ からなる系列 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ だけを考察する。

n 個の項からなる系列を $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ （ただし， $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 0$ ）とする。このとき反調和平均² T

付表 反調和平均の計算式 $(b = \frac{a^2 + c^2}{a + c})$ と内部性の要請

a と c の符号	$ a $ と $ c $ の大小関係	証 明
① $a > 0, c > 0$	$ a > c $	$b - a = \frac{a^2 + c^2}{a + c} - a$ $= \frac{a^2 + c^2 - a(a + c)}{a + c}$ $= \frac{c(c - a)}{a + c}$ ここに，$c > 0, c - a < 0, a + c > 0$ であるから，$b - a < 0$。ゆえに $a > b$ となる。 他方で， $c - b = c - \frac{a^2 + c^2}{a + c}$ $= \frac{c(a + c) - (a^2 + c^2)}{a + c}$ $= \frac{a(c - a)}{a + c}$ ここに，$a > 0, c - a < 0, a + c > 0$ であるから，$c - b < 0$。ゆえに $b > c$ となる。 $a > b$ であり，かつ，$b > c$ なので，$a > b > c$。よって，b は中項である。
	$ a < c $	$b - a = \frac{c(c - a)}{a + c}$ において，$c > 0, c - a > 0, a + c > 0$ であるから，$b - a > 0$。ゆえに $a < b$ となる。 他方で， $c - b = \frac{a(c - a)}{a + c}$ において，$a > 0, c - a > 0, a + c > 0$ であるから，$c - b > 0$。ゆえに $b < c$ となる。 $a < b$ であり，かつ，$b < c$ なので，$a < b < c$。よって，b は中項である。

② $a < 0, c < 0$	$ a > c $	$b - a = \frac{c(c-a)}{a+c}$ において, $c < 0, c - a > 0, a + c < 0$ であるから, $b - a > 0$ 。ゆえに $a < b$ となる。 他方で, $c - b = \frac{a(c-a)}{a+c}$ において, $a < 0, c - a > 0, a + c < 0$ であるから, $c - b > 0$ 。ゆえに $b < c$ となる。 $a < b$ であり, かつ, $b < c$ なので, $a < b < c$ 。よって, b は中項である。
	$ a < c $	$b - a = \frac{c(c-a)}{a+c}$ において, $c < 0, c - a < 0, a + c < 0$ であるから, $b - a < 0$ 。ゆえに $a > b$ となる。 他方で, $c - b = \frac{a(c-a)}{a+c}$ において, $a < 0, c - a < 0, a + c < 0$ であるから, $c - b < 0$ 。ゆえに $b > c$ となる。 $a > b$ であり, かつ, $b > c$ なので, $a > b > c$ 。よって, b は中項である。
③ $a > 0, c < 0$	$ a > c $	$b - a = \frac{c(c-a)}{a+c}$ において, $c < 0, c - a < 0, a + c > 0$ であるから, $b - a > 0$ 。ゆえに $b > a$ となる。 $b > a$ であり, かつ $a > 0$ なので, $b > a > 0$ 。よって, b は中項ではない。
	$ a < c $	$c - b = \frac{a(c-a)}{a+c}$ において, $a > 0, c - a < 0, a + c < 0$ であるから, $c - b > 0$ 。ゆえに $b < c$ となる。 $b < c$ であり, かつ, $c < 0$ なので, $b < c < 0$ 。よって, b は中項ではない。
④ $a < 0, c > 0$	$ a > c $	$b - a = \frac{c(c-a)}{a+c}$ において, $c > 0, c - a > 0, a + c < 0$ であるから, $b - a < 0$ 。ゆえに $b < a$ となる。 $b < a$ であり, かつ, $a < 0$ なので, $b < a < 0$ 。よって, b は中項ではない。
	$ a < c $	$c - b = \frac{a(c-a)}{a+c}$ において, $a < 0, c - a > 0, a + c > 0$ であるから, $c - b < 0$ 。ゆえに $b > c$ となる。 $b > c$ であり, かつ, $c > 0$ なので, $b > c > 0$ 。ゆえに, b は中項ではない。

(注記) ①と②の場合に b は中項である。

の公式は

$${}^2T = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

である。これについて $x_1 \leq {}^2T \leq x_n$ が成立する (「内部性の要請」が満たされる) ための条件を考察する。

ここで技巧のために, $\bar{x}$ を相加平均としたときに, $\bar{x}$ が

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

と表されることを想起する。上式を変形すれば,

$$n\bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

となる。これを反調和平均の公式に代入すると,

$\bar{x} \neq 0$ ($\because n \neq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \neq 0$) なので,

$${}^2T = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n\bar{x}}$$

となる。

(1) ${}^2T - x_1 \geq 0$ となる条件

まず, ${}^2T - x_1 \geq 0$ が成立するための条件を考察する。

$$\begin{aligned}
 {}^2T - x_1 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n\bar{x}} - x_1 \\
 &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1 \cdot n\bar{x}}{n\bar{x}} \\
 &= \frac{1}{n\bar{x}} \{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\}
 \end{aligned}$$

となるが, $n > 0$ なので, ${}^2T - x_1 \geq 0$ が成立するため

には、

$$\bar{x} > 0 \text{ のとき,} \\ (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq 0 \quad (\text{i})$$

$$\bar{x} < 0 \text{ のとき,} \\ (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq 0 \quad (\text{ii})$$

でなければならない。

(2) $x_n - {}^2T \geq 0$ となる条件

$x_n - {}^2T \geq 0$ が成立するには、上と同様に、

$$\begin{aligned} x_n - {}^2T &= x_n - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n\bar{x}} \\ &= \frac{x_n \cdot n\bar{x} - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{n\bar{x}} \\ &= \frac{1}{n\bar{x}} \{x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\} \end{aligned}$$

において、

$$\bar{x} > 0 \text{ のとき,} \\ x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq 0 \quad (\text{iii})$$

$$\bar{x} < 0 \text{ のとき,} \\ x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \leq 0 \quad (\text{iv})$$

となっていなければならない。

以上により、 2T が「内部性の要請」($x_1 \leq {}^2T \leq x_n$)

を満たし、反調和平均となる条件は次のようになる。

$$\bar{x} > 0 \text{ のとき} \\ \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq 0 \\ x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{v})$$

$$\bar{x} < 0 \text{ のとき} \\ \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq 0 \\ x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{vi})$$

q. e. d.

ジニが反調和平均を用いてキズィーニを批判したときの数値例 ($x_1 = -3$, $x_2 = +4$) を用いて、上記条件（この場合は (v) 式）が成立するかどうか検討する。このとき、

$$\bar{x} = \frac{-3+4}{2} > 0$$

であるから、設例では (v) 式が適用される。(v) 式に $x_1 = -3$, $x_2 = +4$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \{(-3)^2 + 4^2\} - \{-3(-3+4)\} &= 25 - 3 \geq 0 \\ \{4(-3+4)\} - \{(-3)^2 + 4^2\} &= 4 - 25 \leq 0 \end{aligned}$$

を得る。これは (v) 式を満たしていない。したがって、このときには 2T は「平衡数」をあたえるが、「内部性の要請」を満たす平均（反調和平均）をあたえることはない。