

タイトル	雪積時における鉄道線路の線形推定に関する研究
著者	上浦，正樹
引用	開発論集，79：173-184
発行日	2007-03-31

雪積時における鉄道線路の線形推定に関する研究

上 浦 正 樹*

1. はじめに

北海道において冬季は降雪によって鉄道の線路は埋まり、排雪によって図1のようにレール面のみが露出しその下部に状態は目視では管理できない。JR では軌道検測車を用いてレール面から軌道の狂いを測定し、走行時の安全を確保している。軌道狂いの原因究明には実際の線路線形に状態を求めることが重要となるが、軌道を覆う雪によって調べることができない。その上、列車走行による軌道変状や凍上、地殻の変動などが蓄積され大きな軌道狂いとなって列車の走行に支障するかは線路上や車上での監視や列車動揺の体感など熟練技術者の能力に依存しているのは現状である。

本稿は、この点に着目して当研究室で開発が進んでいるウェーブレット理論とシステム工学の信号処理理論を用いて軌道検測車のデータから軌道の現場線形を復元する方法を検討するものである。



図1 降雪期の線路

2. 従来の軌道狂い波形の復元方法

(1) 10 m 弦正矢法

軌道検測車(図2)によって走行しながらレール面を測定することで測定し、得られた軌道狂い波形は図3に示すように水平軸(x 軸)に位置、鉛直軸(y 軸)に狂いを示すチャート形式で出力している。これは10 m 弦を基準線として中央5 m の位置で基準線からの離れを軌道狂いとするもので10 m 弦正矢法と呼んでいる。



図2 軌道検測車

* (かみうら まさき) 開発研究所研究員, 北海学園大学工学部教授

(2) 周波数スペクトルと測定系の周波数特性

10 m 正矢法の測定波形 $y(\epsilon)$, 原波形 $x(\epsilon)$ とする。周波数スペクトルとは波形成分を周波数ごとに分解しその振幅の大きさを示すもので、当研究室では FFT 解析により求めている(図4)。この周波数ごとの軌道狂い測定系の周波数特性 $H(\omega)$ は図5である。

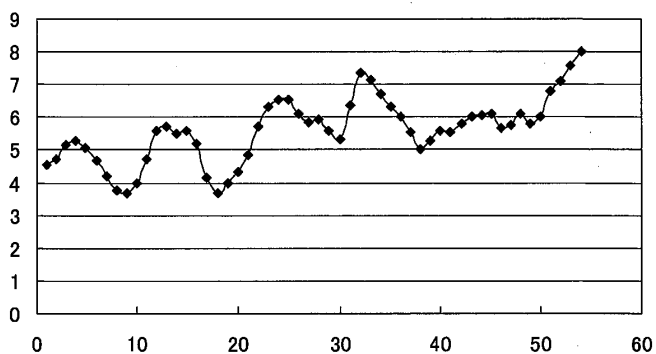


図3 軌道狂いチャート概念図

ここで一般的な波形の成分表示について言及する。任意の波形 $(x(t))$ は式(1)のフーリエ級数で示することができる。

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1)$$

ここで

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

とする。

この式では偶関数の要素を a_n で、また奇関数の要素を b_n で示している。よってこの2つの要素により実数全体を示すことが可能である。そこで奇関数の場合は複素数 i を掛けることで実数化することができ、フーリエ変換で指数 e が用いられていることから、フーリエ変換(式(2))の積分を容易にするために式(1)を指数表示により式(3)とする。

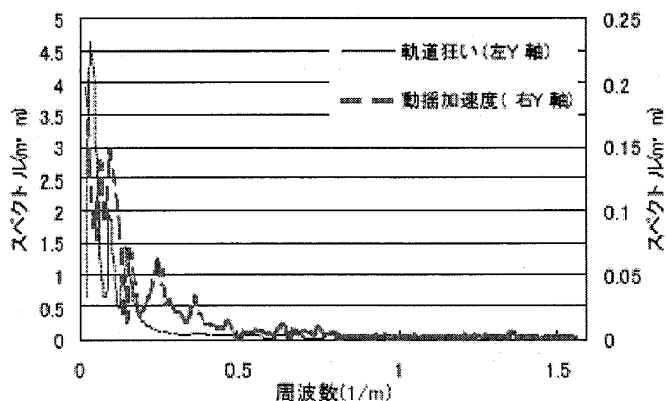


図4 周波数スペクトルの例

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (3)$$

そこで測定波形 $y(\epsilon)$ はある区間 $0 \leq \epsilon \leq T$ で与えられるとき式(3)により次の式として導かれる。

$$y(\epsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_k e^{i\omega_k \epsilon} \quad (4)$$

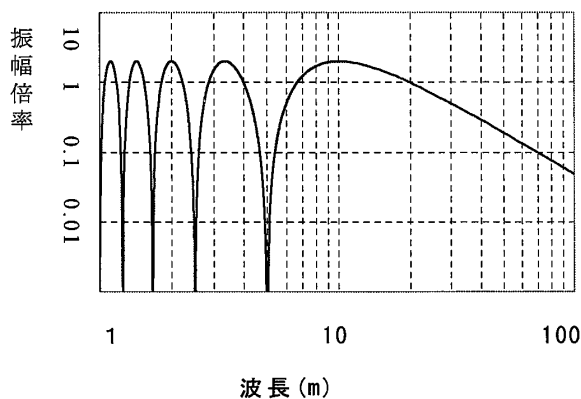


図5 周波数特性 (10 m 弦)

ここで(1)から

$$Y_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(\varepsilon) e^{-i\omega_k \varepsilon} d\varepsilon \quad (5)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6)$$

ここで式(6)を考察する。 ω_k は時間周波数や空間周波数を意味し、この式での T も時間や空間（距離または位置）を表現している。そこで本稿では線路線形を対象としているので ω_k と T は空間を意味していることになる。図6では解析する単位である周期 T を決めることで軌道狂い測定波形 $y(\varepsilon)$ において周期関数 $y_p(\varepsilon)$ を仮定している。次に 10 m 弦正矢法の測定系の周波数特性 $H(\omega)$ は図5に示すように式(7)で示される。

$$H(\omega) = 1 - \cos(\omega \times l) : l = 5 \text{ m} \quad (7)$$

また、空間周波数の定義として λ を波長として式(8)が成り立つ。

$$\omega_k = 2\pi / \lambda \quad (8)$$

よって式(6)と式(8)から $\frac{1}{\lambda} = \frac{k}{T}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) の関係が得られる。よって解析する単位である周期 T を定めると k の値を変化させることで波長 λ が固定化されることになる。

(3) 復元倍率

復元波形を構成するためには 10 m 弦正矢による測定波形 $y(\varepsilon)$ を用いて FFT 解析によって図4のように得られる周波数スペクトル $Y(\omega)$ を求める。次に原波形の周波数の領域の $X(\omega)$ を式(6)で定める。

$$X_k = Y_k \times \frac{1}{H(\omega)} = Y_k \times \frac{1}{1 - \cos \omega_k l} \quad (9)$$

ここで式(4)と同様なフーリエ級数を用いて各周波数成分を加える。

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{i\omega_k \varepsilon} \quad (10)$$

以上の原理により復元波形は求めることができる。ここで式(6)の分母が0となることに着目すると無限大になる波長を避けるために実用上の視点から部分的な範囲に限定して周波数特性 $H(\omega)$ を用いる。

図7は周波数と復元倍率の関係を求めたものであるが、この図では無限大になる波長を避けるために $\lambda = 6 \text{ m} \sim 70 \text{ m}$ の条件を設定している。

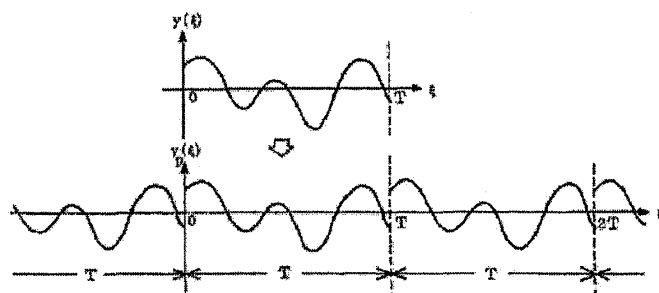


図6 軌道狂い測定波形 $y(\varepsilon)$, $(0 \leq \varepsilon \leq T)$ 周期関数 $y_p(\varepsilon)$

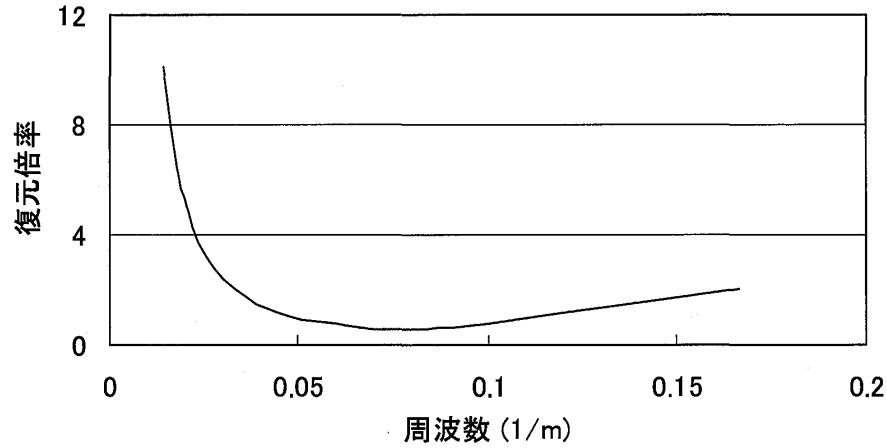


図7 フーリエ級数展開による復元倍率

$$\text{周波数} \quad \text{式(8)} \quad \text{復元倍率} \quad \frac{1}{H(\omega)} = \frac{1}{1 - \cos \omega_k l} = \frac{1}{1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}} : l = 5 \text{ m} \quad (11)$$

(4) フーリエ級数展開を用いた復元波形の構成

式(4)に示した測定波形 $y(\varepsilon)$ をある区間 $0 \leq \varepsilon \leq T$ において実際の測定に即した離散データに置き換える。測定のサンプリング間隔を $\Delta\varepsilon$ とし、離散データによる波形を $yy(n)$ とする。

$$yy(n) = y(n \cdot \Delta\varepsilon) : n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (12)$$

ここで1

$$T = N \cdot \Delta\varepsilon \quad (13)$$

離散フーリエ変換で得られる $yy(n)$ の周波数領域の関数 $Y(k)$ は式(14)となる。

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} yy(n) \cdot e^{-i \frac{2\pi n k}{N}} : k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (14)$$

またこの逆離散フーリエ変換は式(15)となる。

$$yy(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \cdot e^{i \frac{2\pi n k}{N}} : n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (15)$$

N がかなり大きく N がほぼ $N-1$ と見なせると仮定して、式(14)と式(15)を組み合わせ、式(4)と式(5)を組み合わせ、吟味する。無限大の積分と有限の和との違いがあるが式(5)と式(15)とは、平均化する方法であるので同等の見なせる。一方、式(4)は $(-\infty)$ から $(+\infty)$ に対し式(14)では $(1/N)$ を掛ける必要があるが範囲は 0 から $N-1$ であり、式(4)と対比して考える上では対象が半分の領域に限られていることが分かる。

以上の考察から次の式が近似的に成立つ。

$$Y_k = \frac{1}{N} \cdot Y(k) : k=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (16)$$

以上から復元波形は式(17)で求めることができる。

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_i(k) \cdot Y(k) \cdot e^{i \frac{2\pi n k}{N}} : k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (17)$$

ここで復元範囲のみ次の式を用い、それ以外を0とする。

$$H_i(k) = \frac{1}{1 - \cos \frac{2\pi k l}{T}} : k=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

また共役関係から次の式が成立つ。

$$H_i(N-k) = H_i^*(k) : k=0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

(5) 逆フィルタによる復元波形の構成

この方法はフーリエ級数展開のように復元区間に拘束されずに逆フィルタを掛ける方法である。区間を拘束されない代わりに逆フィルタには無限大となる微小区間に遷移帯域を定め前後の領域に漸近する曲線を設けている。

原波形 $x(\varepsilon)$ から 10 m 正矢法の測定波形 $y(\varepsilon)$ へ変換するフィルタを $H(\omega)$ とし、逆に 10 m 正矢法の測定波形 $y(\varepsilon)$ から原波形 $x(\varepsilon)$ へ変換するフィルタを $H_i(\omega)$ とすると次の条件を満たす必要がある。

$$H(\omega) \cdot H_i(\omega) = 1 \cdot e^{-i\alpha\omega} \quad (18)$$

この場合に $H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{i\theta(\omega)}$, $H_i(\omega) = |H_i(\omega)| \cdot e^{i\theta_i(\omega)}$ (18-1) は振幅と位相では次の関係にある。

$$|H_i(\omega)| = \frac{1}{|H(\omega)|}, \quad \theta_i(\omega) = -\theta(\omega) - \alpha\omega \quad (\alpha \text{ は任意の定数})$$

ここで α はフィルタを掛けることにより生ずる出力の遅れを意味する。

次に 10 m 弦正矢法について検討を進める。

復元範囲を波長 λ (m) に関して以下の範囲を選ぶものとする。

$$5 < \lambda_L \leq \lambda \leq \lambda_U < \infty$$

このとき復元逆フィルタ $H_i(\omega)$ は次を与える。

$$|H_i(\omega)| = \frac{1}{1 - \cos \omega l}, \quad \frac{2\pi}{\lambda_U} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{\lambda_L} \quad (19)$$

$$|H_i(\omega)| = 0; \quad \omega < \frac{2\pi}{\lambda_U}, \quad \frac{2\pi}{\lambda_L} < \omega$$

$$\theta_i(\omega) = -\alpha\omega \quad (\alpha \text{ は任意の定数}) \quad (20)$$

図8は復元逆フィルタの空間の角振動数 ω と10m弦の中央5mまでの長さの積で位置を表現している概念図である。環境系の特性は振幅1の正弦関数であり、復元逆フィルタ特性は余弦関数式(19)により示している。この2関数の積は総合特性として $|H \cdot H_i|$ で表示している。

総合特性から1を満足する範囲は(19)

に示す範囲となっている。位相の遅れは式(20)に示す。

(6) デジタル逆フィルタによる復元方法

新幹線の軌道高速検測車ではサンプリングパルスは $\Delta\epsilon=0.3125$ mである。図9の上の図は振幅と周波数の関係を示したものである。ここで図8に示したように式(11)の復元倍率は0及び 2π で無限大となるので復元領域と周波数の前後をカットオフし、処理能力を考慮すると有限個によるデータを用いて遷移領域を定める必要がある。

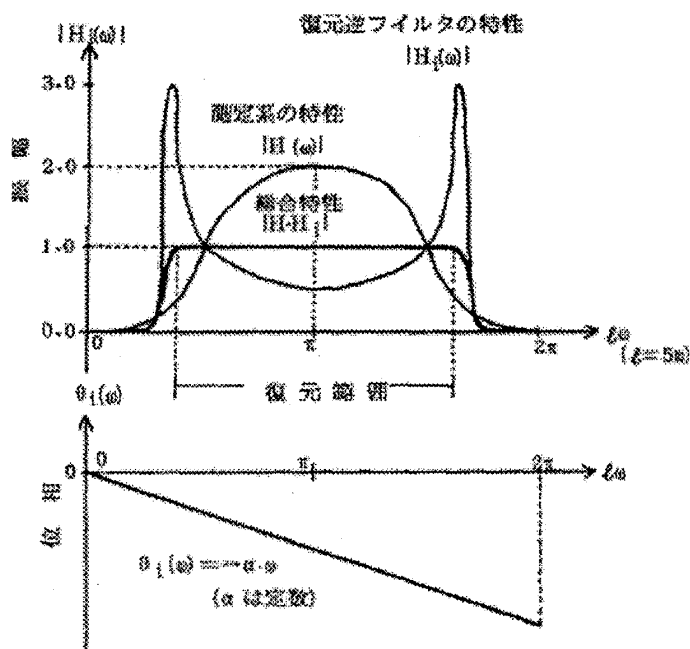


図8 復元逆フィルタの原理¹⁾

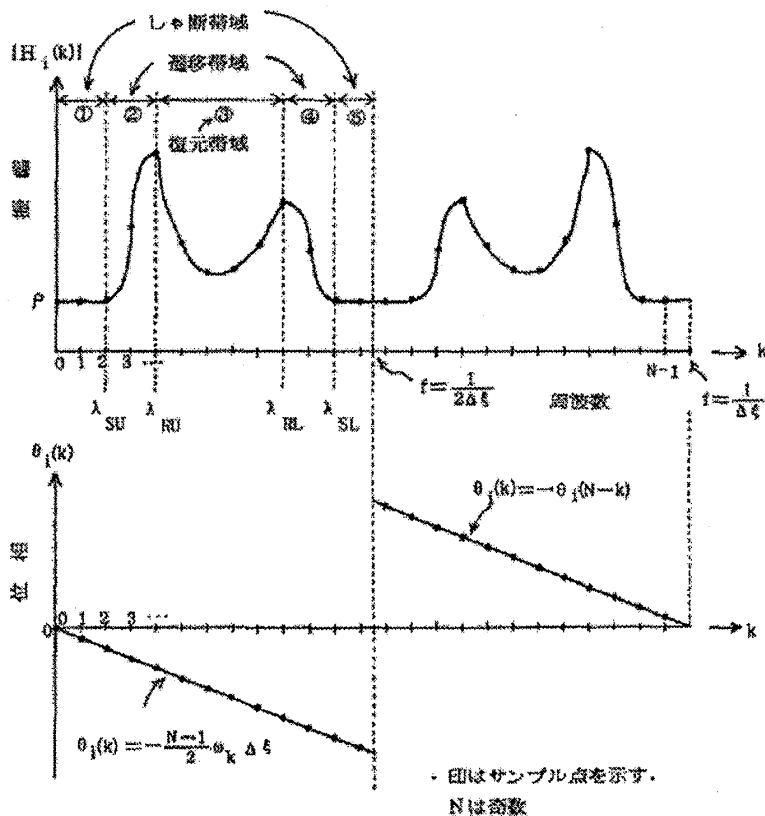


図9 10m弦正矢法による復元逆フィルタの設計¹⁾

(7) FIR フィルタ(インパルス応答)

軌道狂い波形 $y(n)$ より復元波形 $x(n)$ を求めるには図 10 に示す FIR フィルターを用いる。この演算は n 番目の軌道狂い波形に対応するに復元波形を得るために $N-1$ 個の復元逆フィルタ $g(k)$ を用いて式(21)に示す遅延させる方式をとっている。

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \cdot y(n-k) \quad (21)$$

この $g(k)$ はインパルス応答とも呼ばれる。式(18-1)を考慮して式(21)の両辺を Z 変換して $Z = e^{i\omega\Delta\epsilon}$ とおくことから式(22)が得られる。

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \cdot e^{-in\omega\Delta\epsilon} \quad (22)$$

よって式(18-1)の $H_i(\omega)$ と式(22)ができるだけ一致するような復元逆フィルタ $g(k)$ を以下の手順で設計する。

式(20)に示すように位相特性は ω に比例するので周期関数とするためには図 9 のように周波数領域 $1/\Delta\epsilon$ の中の周波数中心で 2 分することが必要である。そこで式(23)が必要条件となる。

$$g(N-n-1) = g(n) : n=0, 1, 2, \dots, \frac{N-3}{2} \quad (23)$$

N は奇数とする。この対称性を生かして式(23)を式(22)へ代入すると式(24)が得られる。

$$G(\omega) = e^{-i\frac{N-1}{2}\omega\Delta\epsilon} \left(2 \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} g(n) \cos\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\Delta\epsilon + g\left(\frac{N-1}{2}\right) \right) \quad (24)$$

ここで式(25)とおくと式(20)を満足する。

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \Delta\epsilon \quad (25)$$

この式から N を奇数とすることで α はサンプリング間隔 $\Delta\epsilon$ の整数倍となる。

(8) 逆解析手法を用いた復元波形の推定

ア) 位相特性

逆解析によって復元波形を推定するための最初の条件として FIR フィルタ (インパルス応答) である $g(k)$ が対称性を示す式(23)を満たす必要があり、式(25)を満足することになる。

イ) 振幅特性

次に示す式(19)で振幅特性は次のように与えら

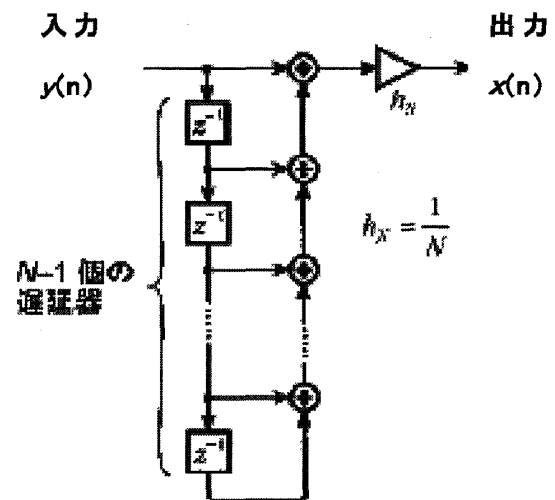


図 10 FIR フィルタ

れている。

$$\begin{aligned} |H_i(\omega)| &= \frac{1}{1 - \cos \omega l}; \frac{2\pi}{\lambda_U} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{\lambda_L} \\ |H_i(\omega)| &= 0; \omega < \frac{2\pi}{\lambda_U}, \frac{2\pi}{\lambda_L} < \omega \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $H_i(k)$ と $g(n)$ が離散フーリエ変換の関係がある¹⁾ことから式(26)が成り立つ。

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_i(k) e^{i \frac{2\pi k n}{N}} \quad (26)$$

周波数サンプリング法と適用するときには式(27)となる。

$$g(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} |H_i(k)| \cos\left(\theta_i(k) + \frac{2\pi k n}{N}\right) \quad (27)$$

以上から $g(n)$ が定まることから式(21)より復元波形 $x(n)$ が求まるが、その精度を確認するために式(28)によって $G(\omega)$ を計算する。

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \cdot e^{-in\omega\Delta\epsilon} \quad (28)$$

この $G(\omega)$ が式(19)の $H_i(\omega)$ とできるだけ等しくなれば、その程度によって精度は確保されたことになるが、ならない場合は N を変化させて同様な作業を行う。

3. 本研究による方法

3.1 多積法の開発²⁾

2 では離散フーリエ変換を用いているため、一定のサンプリング領域を定め、その区間内での周波数分析を行う必要はある。そこで求めた周波数に対応した振幅倍率 $H_i(\omega)$ を求め、平均的な位相を求めフーリエ級数に導入して全体を和から復元波形を求める方法である。よって一定の区間内の平均的な値を振幅倍率にも位相にも用いるため、式(28)に示したような逆解析によって繰り返し計算が必要となる。

本研究では簡易軌道検測装置のトラックマスターが 2 m 正矢法によって検測しているため、2 に示した 10 m 弦正矢法を用いるには大幅な変更が生じるため、本研究室で取り組んでいるウェーブレット解析を用いてトラックマスターによる 2 m 正矢法のデータから復元波形の作成に取り組むこととした。

マザーウェーブレットに Mortel(式 29)を用い単一の正弦波に対してウェーブレット解析をする(図 11)。この解析結果をみるとピークの波長は同心円状に近い範囲内で表示されている。しかしウェーブレット解析を用いた復元波形を構成する上では波長に精度の向上が直接復元波形の精度に影響を与える。

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos 5x \quad (29)$$

そこでウェーブレットの解析結果を一つに波形とみなし、この波形にウェーブレット解析を行う。これをウェーブレット処理2回目とする。このような処理を20回行ったものが図12である。この結果からピーク付近の波長の範囲が絞られていることが分かる。この処理方法を多積法と呼ぶことにする。

式(30)がウェーブレット処理1回目とすると n 回の処理は式(31)に相当する。

$$W_{\psi}^1 \cdot f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (30)$$

$$W_{\psi}^n \cdot f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \frac{1}{a^{n-1/2}} g\left(\frac{x-b}{a}\right)^* g\left(\frac{x-b}{a}\right)^* \dots * g\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (31)$$

$$W_{\psi}^n \cdot f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \frac{1}{a^{n-1/2}} g_n\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (32)$$

ここでシフトを固定し $b=0$ とし、 $g(x)$ のフーリエ変換を $G(\omega)$ とすると式(33)と定義される。

$$F[g(x)] = G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (33)$$

よって式(33)が成立つ。

ここで x/a を(33)へ代入し $\omega a = t$ と置き、 $aG(at)$ を求め t を ω に置き換えると式(34)が導ける。

$$F\left[g\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega \frac{x}{a}} d\omega = a \int_{-\infty}^{+\infty} g(at) e^{-itx} dt = aG(at) = aG(a\omega) \quad (34)$$

次にこの式(34)により、多積法はマザーウェーブレットの畳み込み積分を行っていることに

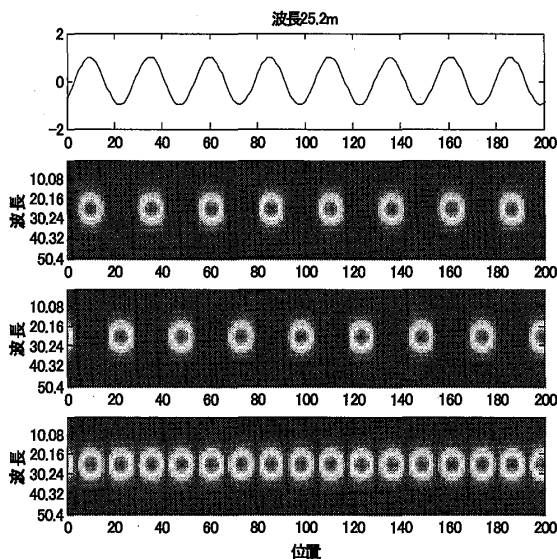


図11 ウェーブレット処理1回

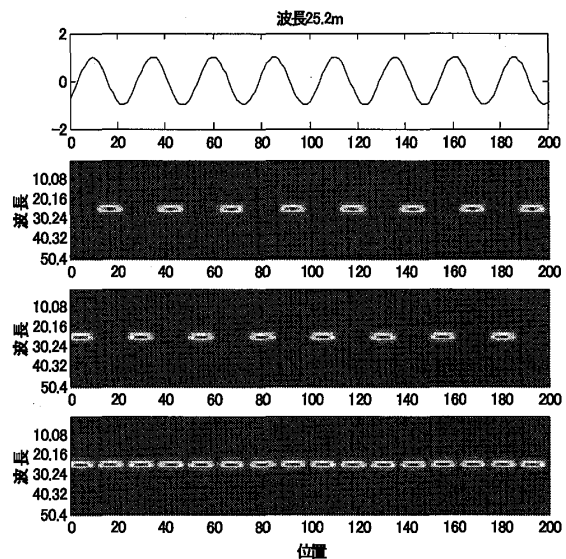


図12 ウェーブレット処理20回

なる。一般関数についてフーリエ解析を行ったものの性質として畳み込み積分を1回行ったものの関数幅(x)は $\sqrt{2}$ 倍となり、周波数(ω)に対応するスペクトルは $1/\sqrt{2}$ となる。よって、この性質を本研究に適用すると多積法を n 回用いると空間分解能は $1/\sqrt{n}$ となり、周波数分解能は $\sqrt{n}$ に向上する。

3.2 多積法による解析結果

単一の正弦波についてウェーブレット処理を1回施したものと20回施したものを図11と図12に示す。この結果から波長のピークを検知する上で多積法により分解能が向上したことが分かる。

次に正弦波の波長を波長12.6mと波長18.9mの複合波を使用するし複合波での検討を行う。そこで、ウェーブレット処理を1回施したものと20回施したものを図13と図14に示す。この結果からウェーブレット処理によって分解能が向上し2種類の波長に分離できることが分かる。

$$\sum_{k=1}^L h_k = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^L h_k^2 = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^L h_k h_{k+2n} = 0 \quad (n \text{ はゼロ以外の整数}) \quad (3)$$

ここで、 L はフィルタの長さである。(1)式はフィルタ要素を全て加えるとゼロになるという意味である。(2)式ではシフトしない場合の内積が1であり、フィルタのエネルギーを1と標準化している。また(3)では偶数倍シフトさせたフィルタと元のフィルタが直交することを意味して

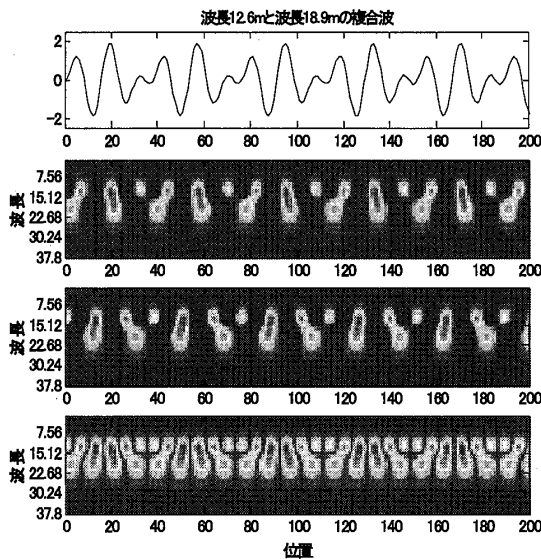


図13 ウェーブレット処理1回

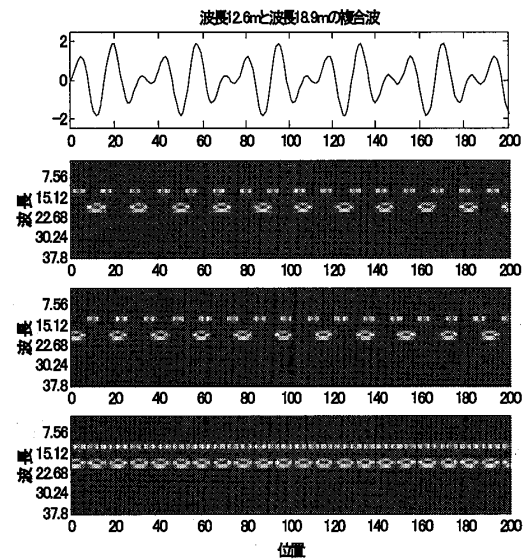


図14 ウェーブレット処理20回

いる。(2)と(3)を合わせて正規直交性の条件を示している。

3.3 復元波形の検討

新幹線の軌道で検測された10 m 弦通り狂い波形に対しマイクロ LABOCS による復元波形と本研究による多積法で波長を分離して逆フィルタを用いて作成された復元波を比較したものを図 15 に示す。

この結果から多積法とマイクロ LABOCS を用いた復元波形は近似していることが分かる。よって、ウェーブレット解析により、復元波形作成の可能性が見出せる。

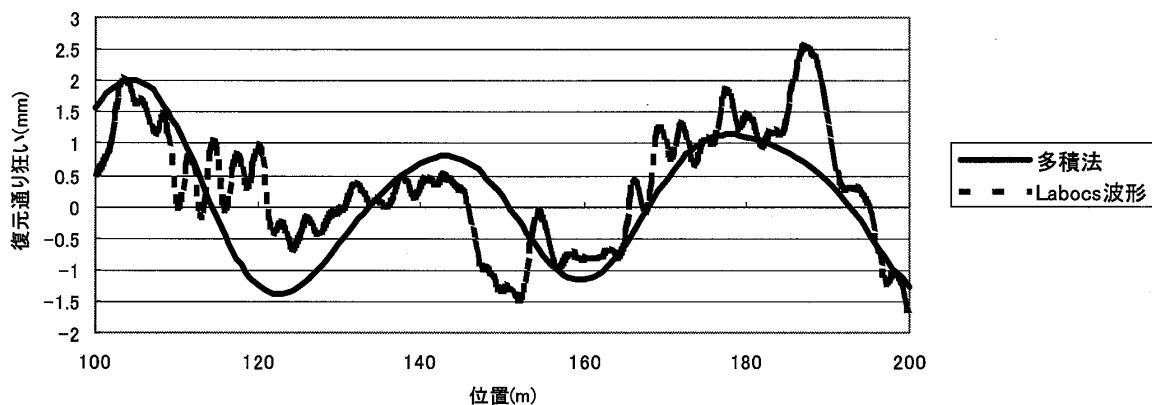


図 15 復元波の比較

4. ま と め

北海道において冬季は降雪によって鉄道の線路は埋まり、軌道検測車を用いてレール面から軌道の狂いを測定し、走行時の安全を確保しているが、軌道狂いの原因究明に必要な線路線形をウェーブレット理論とシステム工学の信号処理論を用いて軌道検測車のデータから軌道の現場線形を復元する方法を検討するうえで必要な周波数分離の方法をウェーブレット解析における多積法を開発した。その利用により作成した復元波形が従来の方法で作成された復元波形に近似することが確認された。

謝辞

多積法については当研究室大学院修士大熊佑治君の考案であり北海学園大学工学部電子工学科魚住純教授により理論的に検討して頂きました。ここで謝辞を表します。

参考文献

- 1) 吉村彰芳：軌道狂い原波形の復元に関する理論的基礎の確立とその応用，鉄道技術研究報告 No.1336 1987.2

- 2) 大熊佑治：Wavelet 解析を用いた鉄道における波形解析とその応用に関する研究，北海学園大学
大学院 修士論文，2007.2