

|      |               |
|------|---------------|
| タイトル | ローレンツ曲線とジーニ係数 |
| 著者   | 木村，和範         |
| 引用   | 開発論集，76：1-23  |
| 発行日  | 2005-09-30    |

# ローレンツ曲線とジーニ係数

木村 和 範\*

## も く じ

はじめに

### 1. ローレンツ曲線をめぐるアメリカにおける論議

- (1) G.K. ホームズ
- (2) G.P. ワトキンス
- (3) W.M. パーソンズ

### 2. フランスにおけるグラフ法の展開

- (1) É. シャトラン
- (2) J. セアーユ

### 3. グラフ法の改良と集中比

- (1) グラフ法の問題点
- (2) 集中面積
- (3) 別解

### 4. 集中面積と集中比との数学的関係

- (1) ジーニの作図
- (2) ジーニの証明
- (3) 集中比の新しい計算式

むすび

## は じ め に

M.O. ローレンツがプロイセンの所得統計にもとづいてあの有名な曲線を公表したのは1905年である<sup>1)</sup>。彼は、その曲線が所得分布の均等化（あるいは不均等化）を分析するとき有効であると主張した。メアリー・J. ボーマンによれば、ローレンツの1905年論文が公表されたのとはほぼ同時期に、ローレンツ曲線を用いた所得分析に象徴されるようなグラフ

による所得分析の方法（以下、グラフ法）は、イタリアではコッラド・ジーニによって、またフランスではエミール・シャトランやJ. セアーユによっても研究された<sup>2)</sup>。後に「ジーニ係数」と呼ばれ、所得分布の不平等度を統計的に計測するときに重視されるようになった「集中比」が初めて公表された、あの論文「特性の集中と変動性の計測について」（1914年）<sup>3)</sup> [以下、1914年論文と略記] のなかで、ジーニは、彼の研究の先行研究としてシャトランとセアーユの業績を参考文献として掲げている。それだけでなく、ジーニはローレンツの1905年論文を含めてそれ以降のアメリカにおける研究をも、みずからの先行研究としている。これらのことから、ジーニが1914年論文でローレンツ曲線とジーニ係数との間の数学的関係を考察したときに、彼に先立つ

1) Lorenz, M.O., "Methods of Measuring the Concentration of Wealth," *Publications of the American Statistical Association*, No.70, 1905 [Lorenz (1905)].

2) Bowman, Mary Jean, "A Graphical Analysis of Personal Incomes Distribution in the United States," *American Economic Review*, Vol.35, No.4, 1945. (ただし、引用は A Committee of the American Economic Association [selected by], *Readings in the Theory of Income Distribution*, London 1950, p.86 による。)

3) Gini, C., "Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri," *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Anno accademico 1913-14, Tomo LXXIII, Parte seconda [Gini (1914)].

\* (きむら かずのり) 開発研究所研究員、本学経済学部教授

アメリカやフランスにおける研究を念頭においていたことは明らかである。

ところで、このジーニの1914年論文の目的は、おおむね次の3点に要約できる。すなわち、①関数関係で表現できない分布一般の集中度を計測するための指標としての集中比の定義とその計算式の誘導、②ローレンツ曲線（ジーニはこれを「集中曲線」と言う）と均等分布直線とで囲まれた（三日月型の）図形の面積（ジーニはこれを「集中面積」と名づけた）と集中比（ジーニ係数）との間の数学的関係の解明、③平均差による集中比の再定義、である。このうちの論点①と論点③の考察は、別稿の課題とする。本稿では、論点②だけを取り上げる。1914年論文における論点②の取り扱いを見れば、そこでは、グラフ法にかんする先行研究に言及されてはいるものの、叙述の力点は先行論文の筆者とタイトルの一覧におかれていることが分かる。また、ローレンツ曲線とジーニ係数との間の数学的関係にかんするジーニの数式展開は必ずしも分かりやすいものとは思われず、一方の数式から他方の数式への誘導過程の理解には時間を要する。このために、本稿では、ローレンツ曲線とジーニ係数との数学的関係、すなわち、ローレンツ曲線と均等分布直線（45°線）とに囲まれた図形の面積を $\lambda$ とおき、ジーニ係数を $G$ で表わせば、

$$G = -\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

が成立することについての、ジーニによる証明を跡づけ、ジーニ理論の特徴を明らかにしたい。この(1)式自体は旧聞に属するものであって、この数学的関係にかんする本稿の叙述は、

創始者ジーニの原典に即しているという点を除けば、何ら目新しいものではないことをあらかじめ断っておく。

なお、本稿ではこれを取り上げるに先立って、次の2つの点に言及する。それらはいずれもジーニ理論の形成に影響をあたえたと考えられるからである。その第1は、ローレンツ曲線をめぐるアメリカにおける論議である。これにかんしては、ローレンツ論文以降、アメリカでは所得分析において果たすグラフ法（とりわけローレンツ曲線）の役割が認められるようになったことを述べる。

そして、本題に入る前に取り上げる第2の点は、ローレンツとほぼ同時期に、彼と同じ目的をもって研究されたフランスにおけるグラフ法の紹介である。このことを通じて、アメリカと同様にフランスでもグラフ法が所得分析ツールとして、その有用性が認められるようになったことを述べる。

## 1. ローレンツ曲線をめぐる アメリカにおける論議

ローレンツの1905年論文が刊行された後、アメリカでは、所得や富の集中にかんする計測方法をめぐって論議があった。その過程で、ローレンツのグラフ法は肯定的な評価を受けた。

### (1) G.K. ホームズ

ホームズは、一方で、所得の大きさの順に並べられた人々の人数をちょうど半分にする所得（メディアン）を計算した。他方で、所得階級別の所得総額の分布にかんしてもとめられるメディアンを計算した。そして、この

2つのメディアンの差を計算し、この差が広がるにつれて、集中が強まると考えた。この尺度（2つのメディアンとその差の合計3個の尺度）が「三連尺度（triple measure）」である。

ローレンツは、1905年論文でホームズの「三連尺度」を批判した。この批判が公刊されたアメリカ統計協会機関誌の翌号（第71号）に、ホームズは、ローレンツにたいする反批判を公表した。その趣旨は所得分布の集中度をメディアンで計測すること（三連尺度）の有効性を改めて主張することにあつたが、ホームズは、その短評を、彼の反批判が「ローレンツ氏の思慮深いグラフ法という構想にたいするいささかの反論を意味するものではない」という文言で結んでいる<sup>4)</sup>。そして、ホームズは、ローレンツのグラフ法を集中度の計測方法のひとつとして位置づけた。

## (2) G.P. ワトキンス

### ① ローレンツの擁護

ローレンツの1905年論文と上で取り上げたホームズの論文を踏まえて執筆されたワトキンス論文は、ホームズ論文が掲載されたアメリカ統計協会機関誌の翌号（第72号）に掲載された<sup>5)</sup>。ローレンツは、所得階級の上限值や下限値を変えることなく階級区分を固定して、所得分布を時間的に比較したとしてG.J.

ゴッシェン（イギリス）<sup>6)</sup>やJ. ヴォルフ（スイス）<sup>7)</sup>を批判した<sup>8)</sup>。このことに触れて、ワトキンスは、所得分布の集中が本来的に相対的な概念である（「測定されるべき量は相対的なものである」<sup>9)</sup>）と述べ、ローレンツを支持している。さらに、ワトキンスは「ローレンツ氏の方法は、彼〔ローレンツ〕が枚挙した論者の上位にあつて、重要な成長を示すものである。それは、解析性(analysis)、連続性(continuity)、相対性(relativity)というすべての要請を満たしている」と述べて<sup>10)</sup>、グラフ法によるローレンツの分析を肯定的に評価している。

ここに、ワトキンスの言う「解析性」とは、どれだけの割合の人々が社会的な富の総体のうちのどれだけを領有しているかを具体的に数値で示すことである。「連続性」とは、所得分布の研究が特定の所得階層に限定されるのではなく、すべての所得階層に及ぶべきものであることを意味する。換言すれば、所得分布の研究には、社会全体の総体的な把握を企図することがもとめられているのである。

最後の「相対性」とは、たとえば中位とされる所得階級は、固定的な所得額によって絶対的に確定されるものではなく、そのときどきに变化する相対的な区分を示すにすぎない

4) Holmes, G.K., "Measurement of Concentration of Wealth," *Publications of the American Statistical Association*, No.71, 1905, p.319.

5) Watkins, G.P., "Comment on the Methods of Measuring the Concentration of Wealth," *Publications of the American Statistical Association*, No.72, 1905. [Watkins (1905)]

6) Goschen, George Joachim, "Increase of Moderate Income," *JRSS*, Vol.50, 1887.

7) Wolf, Julius, *System der Sozialpolitik, Erster Band: Grundlegung. Sozialismus und kapitalistische Gesellschaftsordnung. Kritische Würdigung beider als Grundlegung einer Sozialpolitik*, Stuttgart 1892.

8) ローレンツによる批判については、木村和範「ローレンツ曲線の形成」『経済論集』（北海学園大学）第51巻第3・4合併号、2004年 pp.65 ff., pp.72 ff. 参照。

9) Watkins (1905), p.349.

10) Watkins (1905), p.353.

ことを意味する。あるときには上位の所得階級を示すと見られた所得も、貨幣価値の変動によって、中位の所得階層を示すように変化することがある（実際に、カリフォルニアにおける金鉱山の発見は貨幣価値の変動をもたらした）と、ワトキンスは述べている。この見解は、特定の所得階級の所得額だけを抜き出して分析するならば、間違った判断に至ることがあるということへの戒めを本旨とするのであって、所得や資産の絶対額を活用した分析を一般的に抑制しているわけではない。このことは、ワトキンスが後の論稿で具体的に遺産の集中を分析したときに明らかになる。ここでは、さしあたり、ワトキンスがローレンツ（とりわけグラフ法）の擁護者として旗幟を鮮明にしたことを確認して、次に進む。

## ② 両対数グラフによる遺産分析

ローレンツのグラフ法を支持した論文（第72号論文、1905年）の末尾において、ワトキンスは、所得、資産、厚生（welfare）の集中にかんする研究を今後の課題とした。それを受けて、みづからワトキンスは、マサチューセッツ州労働統計局が収集した検認遺産統計（probate statistics）によって遺産分布の集中を研究した（1908年）<sup>11)</sup>。

その際、彼はコーネル大学数学科のF.R.シェイプス（Shapes）から示唆を得て、対数を活用した。そして、対数変換した所得分布が直線状になることをパレートから学び、検認遺産の分布を両対数グラフで表示した（図

1）<sup>12)</sup>。対数尺度のグラフは、小さい値とともにその値からかけ離れた大きな値を同時に一枚のグラフに表示する。これを長所と見るか欠陥と見るかについて意見は分かれるが、ローレンツは、おそらく大きな値の違いが対数グラフでは小さな違いとなって現れることからであろうか、「対数曲線は多かれ少なかれ頼りない（treachous）」と述べて、対数グラ

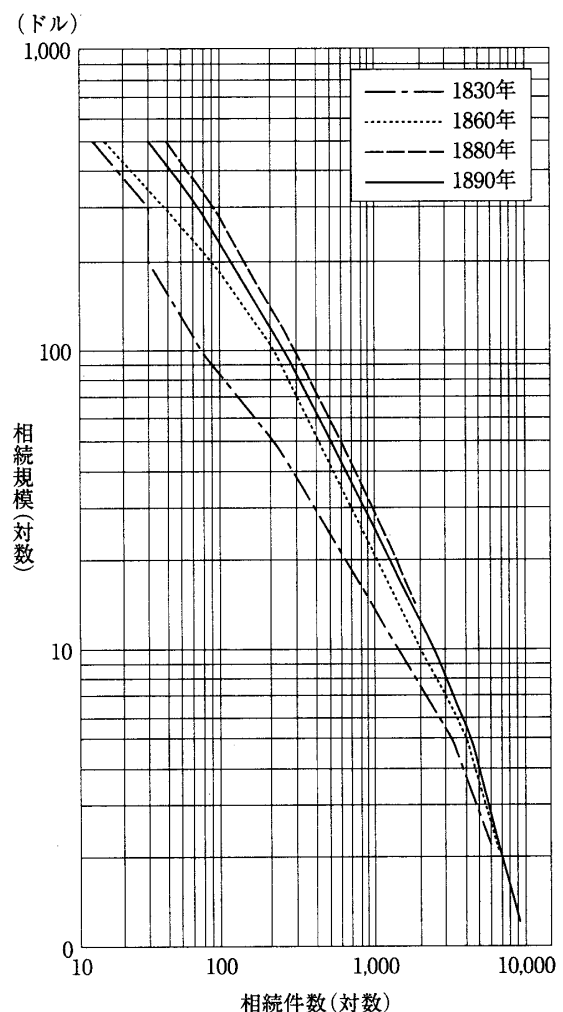


図1 マサチューセッツ州における相続による土地所有の集中（1830年～1890年）

（出所）Watkins, G.P., “An Interpretation of Certain Statistical Evidence of Concentration of Wealth,” *Publications of the American Statistical Association*, No.81, 1908, p.36.

11) Watkins, G.P., “An Interpretation of Certain Statistical Evidence of Concentration of Wealth,” *Publications of the American Statistical Association*, No.81, 1908 [Watkins (1908)].

12) Watkins (1908), p.36f.

フの使用に慎重であり、それがパレート批判の論点のひとつとなっている<sup>13)</sup>。

それにたいして、ワトキンスは、ローレンツのパレート批判が「性急 (hasty)」であると指摘した。そして、対数目盛で検認遺産の分布をグラフ化すれば、ほぼ直線状のグラフが描かれ、これを比較することによって、集中が強まる傾向にあるかどうかの動向を探ることができる<sup>14)</sup>と述べた。

ワトキンスは、図1の他に、イギリス(19世紀半ばから20世紀初頭)やフランス(20世紀初頭)についても土地所有にかんして類似のグラフを描いて、集中を研究した。ワトキンスによれば、直線の勾配が急であるほど、集中の強化を意味するとされる。この解釈はパレート<sup>14)</sup>と同じである。

このように、ワトキンスは対数の活用にかんしてローレンツを批判しつつも、グラフ法によって分析を進めるという点では、ローレンツと同一基調にあると言える。

グラフ法の有効性を主張したワトキンスは、単一の数量的尺度による集中の計測には批判的であった。とくに変動係数の使用を批判した。このことをめぐってはパーソンズとの間で論争が行われている。次に項を改めて、このことを取り上げることとする。

### (3) W.M. パーソンズ

#### ① ワトキンス批判

両対数グラフにおける直線の勾配によって、集中の度合いを比較できると主張したワ

トキンスにたいして、その翌年の1909年、『経済学季報』第23号でパーソンズは次のように批判した<sup>15)</sup>。

第1に、ワトキンスの方法そのものが厳密ではない。ワトキンスみずからが表明しているように、「このようにして比較された2つの数字の系列の間にいったいどの程度の差異があるのかはいっこうに明らかににはならない。」

第2に、目視による勾配の比較に信頼を寄せることはできない。比較のための数値的尺度があたえられていないということもあるが、直線全体が勾配を異にするいくつかの直線で合成されているとき、2つの系列における集中を全体としてどのように判断するべきかが不明である。

第3に、所得(もしくは遺産)の総額と件数が全体的に上昇するときには、勾配は不変であり、さらにまた、最上位所得階層の所得が上昇しても、その額は対数変換によって小さくなり、直線の勾配の変化は目視で確認できるほどの違いとなつては現れないことがある。

第4に、直線の勾配を比較する方法では、少額所得階層が分析の埒外に置かれる。この第4の欠陥は、ワトキンスのグラフ法に固有の欠陥であるようには考えられないが、ワトキンスは、低額所得階層(あるいは少額遺産の相続階層)に分析の力点を置いていない。このことをパーソンズは批判したのである。

この批判のうえに、パーソンズは、所得や遺産の集中を計測するには、ワトキンスの提

13) Lorenz (1905), p.217.

14) *e.x.* Pareto, Vilfredo, "La legge della domanda," *Giornale degli Economisti*, Serie seconda, Volume X, 1895, p.61.

15) Persons, Warren M., "The Variability in the Distribution of Wealth and Income," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.23, 1909, p.428f. [Persons (1909)]

唱するグラフ法を排して、統計系列全体にわたる一元的な判断基準が必要であると主張した。パーソンズが、この一元的な数値尺度として採用したのは変動係数 (coefficient of variability) である。

## ② 変動係数

変動係数は、標準偏差を相加平均で除して得られる比率（あるいはそれを 100 倍してパーセントに換算した数値）である。変動係数を援用するパーソンズの考え方に示唆をあたえたのは、計量経済学の理論と応用の分野で、つとに著名なヘンリー・L. ムーア<sup>16)</sup>である。彼は、アメリカにおける 1890 年と 1900 年における平均週給を比較した。そのとき、変動係数を計算して、格差が縮小していることを明らかにした（表 1）。

パーソンズは、系列の変動を比較するときに果たすと期待される変動係数の有効性を主張する目的で、標準偏差を異にする（ただし、相加平均は同一の）2 つの統計系列を取り上げた<sup>17)</sup>。同一の相加平均のもとでは、変動係数の違いはもっぱら標準偏差の違いによること

になるので、パーソンズの叙述は、標準偏差（もしくは分散）が分布の散布度を示す指標となることを示すための例解でしかないが、彼は、変動係数が大きいほどデータの散布はより広範囲に及ぶこと、したがって、それは、分布を構成する各項の強度の平等性の弱まりを示すことを主張した。そして、このことをもって変動係数がより強化された集中を検出できることの論拠とした。

さらにまた、パーソンズは変動係数を計算して、フランスとイギリスの集中（いずれも 20 世紀初頭）にかんするワトキンスの結論を批判した。ワトキンスによれば、遺産として相続された土地面積の集中については、イギリスの方がフランスよりも強化したことになっているが<sup>18)</sup>、同一のデータにもとづいてパーソンズが変動係数を計算したところ、ワトキンスとは逆に、フランスの方が集中度は高いと結論された。このことを傍証する目的で、パーソンズは関連データについてローレンツ曲線を描き、フランスの方が均等分布直線からより乖離していることを示した<sup>19)</sup>。

## ③ ワトキンスとの論争

上で取り上げたパーソンズの論文にたいするワトキンスの反批判が翌年 (1910 年) の『経済学季報』誌 (第 24 巻) に掲載された<sup>20)</sup> (その論文の末尾にはパーソンズからの反論<sup>21)</sup>

表 1 平均週給と変動係数

|           | 1890 年  | 1900 年  |
|-----------|---------|---------|
| 労働者数 (人)  | 104,923 | 160,055 |
| 平均週給 (ドル) | 11.57   | 11.52   |
| 変動係数 (%)  | 45.9    | 43.5    |

(出所) Moore, Henry L., "The Variability of Wages," *Political Science Quarterly*, Vol.22, 1907, p.61.

16) 近 昭夫「H.L. ムーアと統計的経済学」『統計的経済学研究——計量経済学の成立過程とその基本問題——』梓出版社 1987 年 第 1 章参照。

17) Persons (1909), pp.432ff.

18) Watkins (1908), p.47.

19) Persons (1909), p.441f.

20) Watkins, G.P., "The Measurement of Concentration of Wealth," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.24, 1910.

21) Persons, Warren M., "The numbers in the following refer to the section of Dr. Watkins' Note," *The Quarterly Journal of Economics*,

が付けられている)。

集中の計測方法に論点を限定して、両者の間で行われたこの誌上論争を見ると、それは、要するに、統計系列を比較するときに、単一の統計的尺度(変動係数)を用いるか(パーソンズ)、系列の分布を視覚的な手段(グラフ法)によってその総体において対照するか(ワトキンス)の問題に帰着すると言えよう。ここでは、この両者の方法論的な違いを超越して、ローレンツのグラフ法にたいしては、統計系列の集中度の視覚的な評価手段としての意義が——正確な統計系列を前提として——いずれの論者にも肯定的に評価されていたことを確認するにとどめる。

## 2. フランスにおけるグラフ法の展開

1905年にローレンツ論文が公刊された後もアメリカでは、所得分布の集中にかんする統計的計測をめぐって論議が継続されたことは、前節で述べた。ジーニの1914年論文は、この種の論議がフランスでも行われていたことを伝えている<sup>22)</sup>。その論議を見ると、ローレンツとほぼ同時期に、だが若干遅れて(おそらく独立に)ローレンツ曲線と似たような曲線で分布の集中を計測しようとする試みがあったことが分かる。しかし、以下で取り上げる二人のフランスの研究者はローレンツとの関連について触れていない。しかも、ジーニは、フランスにおけるグラフ法の展開があたえた自説への影響について明言してはいない。このために、フランスにおける研究とア

メリカで展開されたグラフ法やジーニ理論との関係は、なお不明なところを残している。

### (1) É. シャトラン

シャトラン<sup>23)</sup>は、相続遺産の申告額にかんする統計が社会経済的ならびに財政問題を考察するときの必須のデータであると位置づけ、それにもとづいて一部の者への富の集中を考察した。1905年のフランス全土にかんする相続統計によれば、100万フラン以上を相続したのは527人(相続人全体の0.1%)であるが、その相続総額は約17億6,700万フラン(相続総額の30.8%)であった。このことにもとづいて、シャトランは富の集中が昂進していると主張した<sup>24)</sup>。

しかし、シャトランは、分析を特定階層の相続に限定するのではなくて、フランス全土に渡った概観が必要であると考えた。このことを示すために、彼は「相続曲線(la courbe des successions)」を考案した。この曲線をグラフ化するにあたってシャトランは、横軸に累積相続件数、縦軸に相続額をとり、横軸の1ミリメートルを500件の相続に、また縦軸の1ミリメートルを1万フランの相続額に対応させた。1905年の相続統計をこのグラフで

23) ジーニはシャトランの論文として次の3篇を引用している。ただし、②と③の掲載図は同一である(図3参照)。① Chatelain, Émile, "Les successions déclarées en 1905," *Revue Politique et Parlementaire*, Tome LIV, 1907 [Chatelain (1907)]; ② ditto, "Le tracé de la courbe des successions en France," *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1910 [Chatelain (1910)]; ③ ditto, "La fortune française d'après les successions en 1909," *La Démocratie*, 20 Janvier 1911.

24) Chatelain (1907), p.162.

Vol.24, 1910.

22) Gini (1914), p.1229.



示すとすれば、累積相続件数が 385,019 件であるから、横軸の長さは 77 センチメートルとなる。また、相続の最上位カテゴリー（カテゴリー13）の下限は 5,000 万フランであるから、この値を表示するだけでも縦軸の長さは 5 メートルになる。このようなサイズのグラフは書物 1 ページ分のスペースに収まらない。そこで、シャトランは相続額が 10,001 フラン以上の相続件数を取り出し、100 万フラ

ン以上の相続については相続件数を合算して、そのグラフを描くことにした（図 2）。

シャトランのグラフは、全体を表示するのには大きすぎる。このため、後にその非実用性がセアージュによって批判されることになるが、この点については後述する。そして、ここでは、シャトランが対数目盛を使用しなかった理由について触れておく。

シャトランによれば、対数目盛を活用する

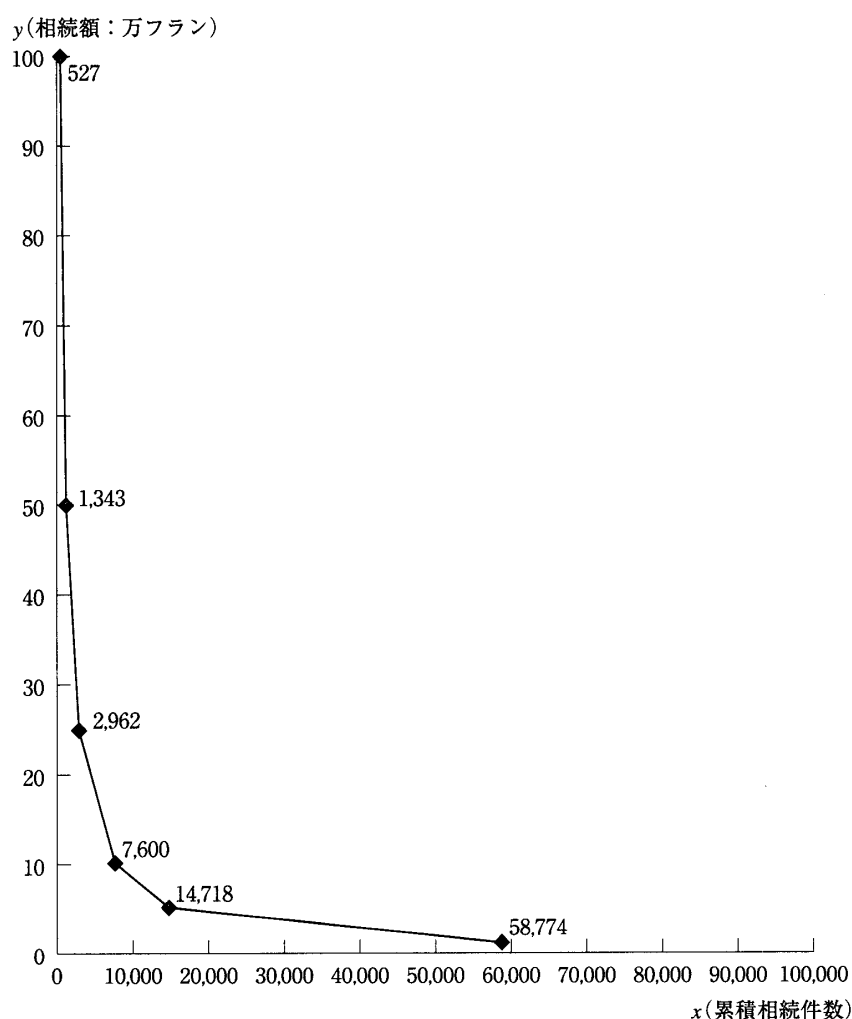


図 2 1905 年における相続曲線

(注記) グラフのなかの数字は、以下に掲げる累積相続件数に対応する（原データの出所は下の論文 [p.161]）。

| 相続額 (万フラン) | 100～ | 50～   | 25～   | 10～   | 5～     | 1～     |
|------------|------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 累積相続件数     | 527  | 1,343 | 2,962 | 7,600 | 14,718 | 58,774 |

(出所) Chatelain, Émile, "Les successions déclarées en 1905," *Revue Politique et Parlementaire*, Tome LIV, 1907, p.165 にもとづく。

ことには書物の寸法による制約を回避するという「利点」はあるが、しかし「資産分布にかんする直感的イメージを目に見えるようにする」ことを損なうばかりか、図2のように曲線で表示されているからこそ、不平等な分布が「目視」できるのであって、「図示にまつわるあらゆる長所を失う」ことのないようにするために、あえてデータを対数変換しないと述べている<sup>25)</sup>。

1907年に論文を公刊した後、シャトランは「新しいやり方」を発表した(1910年)。彼によれば、書物の判に余る大きさの曲線で分布を表わさざるをえないということ自体が、「その分布の極端な不平等性(ないし集中)[l'extrême inégalité (ou concentration)]」を示している<sup>26)</sup>。この社会的事実を1ページに収まるグラフによって示す目的でシャトランが考案した「新しいやり方」とは、

① 縦軸を相続額とする、

② 横軸を相続件数とする、

③ 縦軸・横軸ともにその長さを20センチメートルとし、縦軸にあつては(図2では相続額そのものの大きさが表示されていたが)相続総額がその端点にくるように、その長さを案分し、他方で、横軸にあつては、相続総件数が、同様に端点にくるように、その長さを案分する、

④ 縦軸・横軸の値は累積値として、それを図上にプロットする、

という方法である。

シャトランは、1903年から1907年までの(ただし、1906年を除く)フランスにおける相続件数(x軸)と相続総額(y軸)についてその平均を計算して、次のような表にまとめた(表2)。そして、上述の作図方針にもとづいて表2のデータからグラフを作成した(図3)。シャトランは、「目視」のための「新しいやり方」によって、それ以前に構想したグ

表2 フランスにおける相続の分布(1903年-1905年, 1907年。4カ年の平均)

| 相続額(フラン) | カテゴリー | 件数(累積)     | 比率*    | 総額(累積)        | 比率**  |
|----------|-------|------------|--------|---------------|-------|
| (以上)     |       | (件)        |        | (フラン)         |       |
| 5,000万   | (1)   | 1.75       | 0.04   | 168,683,228   | 31    |
| 1,000万   | (2)   | 11.00      | 0.30   | 338,214,451   | 63    |
| 500万     | (3)   | 40.00      | 1      | 546,361,841   | 102   |
| 200万     | (4)   | 171.50     | 4      | 932,333,649   | 174   |
| 100万     | (5)   | 509.50     | 13     | 1,409,733,649 | 263   |
| 50万      | (6)   | 1,274.50   | 32     | 1,943,581,449 | 363   |
| 25万      | (7)   | 2,875.50   | 74     | 2,508,278,678 | 468   |
| 10万      | (8)   | 7,507.50   | 193    | 3,229,685,458 | 603   |
| 5万       | (9)   | 14,701.50  | 378    | 3,729,938,608 | 696   |
| 1万       | (10)  | 58,679.50  | 1,509  | 4,667,339,633 | 872   |
| 2,000    | (11)  | 165,775.50 | 4,265  | 5,189,312,080 | 969   |
| 500      | (12)  | 270,000.50 | 6,948  | 5,321,422,094 | 994   |
| 1        | (13)  | 388,556.00 | 10,000 | 5,351,489,170 | 1,000 |

訳注 \* 相続件数の累積総合計(388,556.00件)を10,000としたときの比率(累積相対度数)。

\*\* 相続額の累積総合計(5,351,489,170フラン)を1,000としたときの比率(累積相対度数)。

(出所) Chatelain, Émile, "Le tracé de la courbe des successions en France," *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1910, p.353.

25) Chatelain (1907), p.164f.

26) Chatelain (1910), p.352.

ラフ法の欠陥を克服しようと試みたのである。

この図3の左下から右上にかけて対角線をつなぐと、均等分布直線が描かれるので、この作図の方法は基本的には1905年にローレンツが提示したグラフ法と異なるところはない。ローレンツとの違いは、①縦横の軸にかんする数値の取り方が逆であること、②折れ線が左角に引き寄せられればそれだけ、集中が強まるとは述べられていないこと、である。

## (2) J. セアーユ

以上に述べたように、シャトランは、2つのグラフ法を提起し、そのうちの第1(最初)の方法の不適切性を自覚して、それに改良を加え、第2の方法を「新しいやり方」として再提起した。セアーユは、シャトランの第1の方法によって描かれるグラフは書物の1ページに収まらないだけでなく、時空を異にする2つ(あるいはそれ以上)の統計系列の違いがグラフの形状の著しい違いとなって現

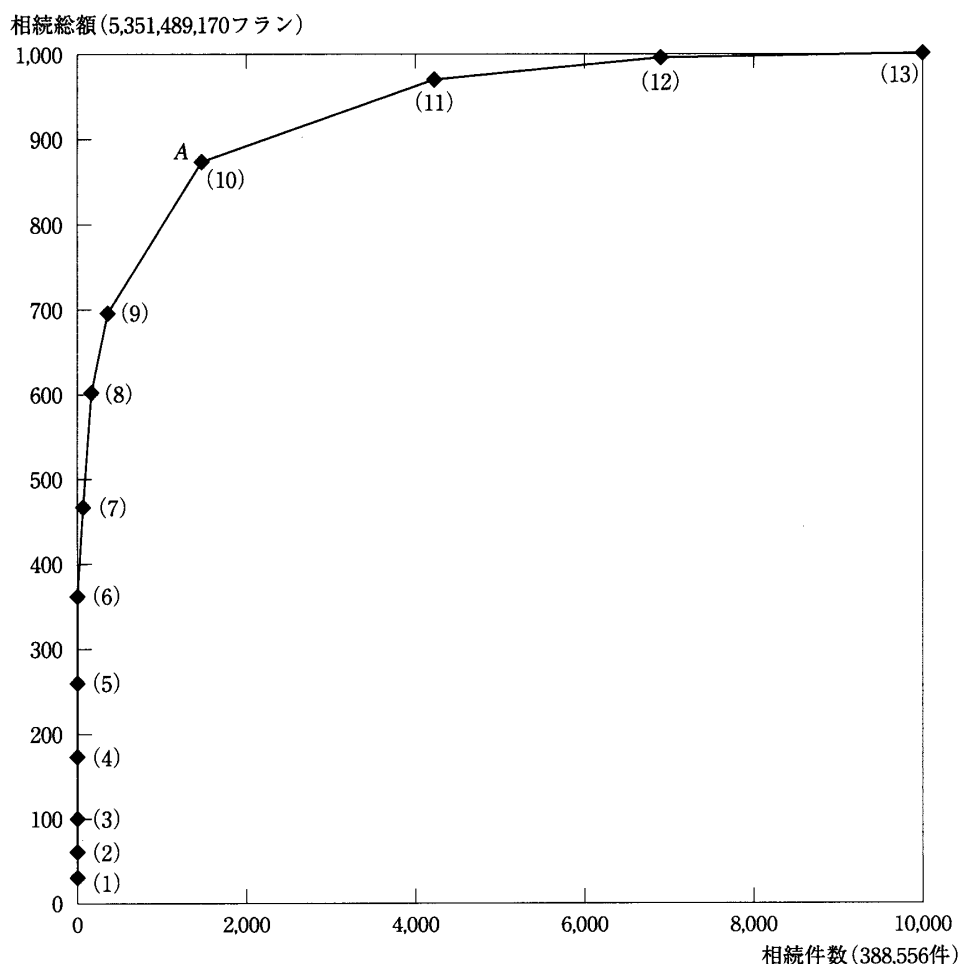


図3 フランスにおける相続の分布曲線 (1903年-1905年, 1907年の平均)

- (訳注) 1. 図中の ( ) 内数字は表2の表側に対応している。たとえば点Aは、相続額が1万フラン超(第1カテゴリーから第10カテゴリーまで)の階級の相続額に対応する累積相続件数を示す。
2. 横軸の目盛は、相続件数の累積総合計(388,556.00件)を10,000としたときの比率(累積相対度数)。
3. 縦軸の目盛は、相続額の累積総合計(5,351,489,170フラン)を1,000としたときの比率(累積相対度数)。

(出所) Chatelain, Émile, "Le tracé de la courbe des successions en France," *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1910, p.353 にもとづく。

れることもあって、それらを実際に比較することが困難であると批判した<sup>27)</sup>。ただし、セアーユはシャトランと同様に、対数目盛の活用には批判的である。対数目盛の採用は、パレト以来の所得分布研究の伝統的なあり方と見ることができるが、対数は大きな実測値を小さな値へと変換するために、本来の分布とは異なった印象をあたえる。セアーユはこのことを指摘して、シャトランとともに対数の活用を忌避した<sup>28)</sup>。

さらにまた、セアーユは、シャトランの第2の方法(系列全体の合計値を端点とする「新しいやり方」によるグラフ法)を次のように

批判している。たとえば、横軸の値(相続総件数)が基準時点と比較時点とで不変であるとしても、相続総額が異なっていれば、図4(a)のようになり、2本の曲線の比較が困難となる。あるいはまた、横軸と縦軸の端点の値(相続総件数と相続総額)が同時に変化してしまえば、同一のグラフに2本の曲線を描いても、たとえば図4(b)のようになって、曲線の比較は困難である。

このようにシャトランを批判したセアーユは、最終的に①縦軸には相続額をとり、横軸には相続件数をとるという点ではシャトランの方式を踏襲し、②縦軸と横軸に累積百分率

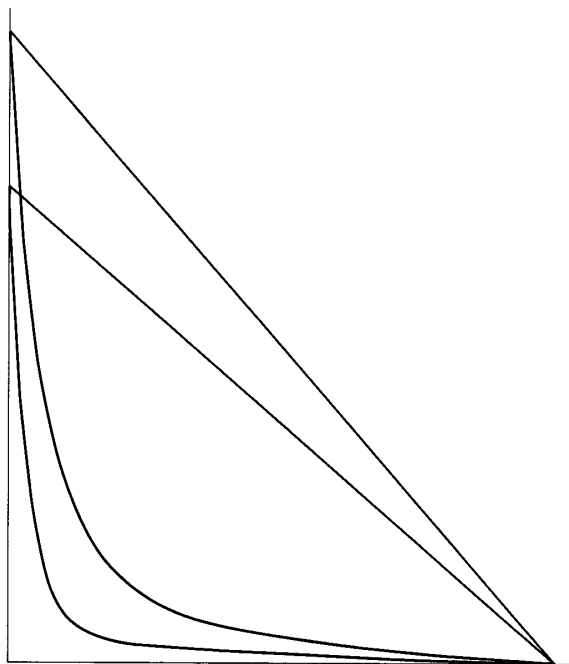


図4(a) 一方の総計が不変でも他方の総計が変化する場合

(訳注) 横軸の左端と縦軸の上方の端点が総計を示しているため、曲線の形状はシャトランの曲線(図3)とは逆になる。図4(b)についても同様である。

(出所) Séailles, J., *La Répartition des Fortunes en France*, Paris 1910, p.55.

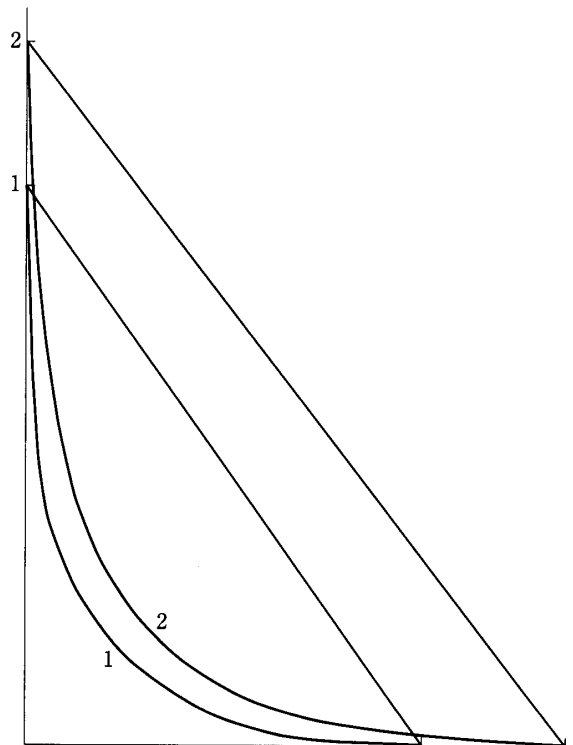


図4(b) 両軸の端点異なる場合

(出所) Séailles, J., *La Répartition des Fortunes en France*, Paris 1910, p.54.

27) Séailles, J., *La Répartition des Fortunes en France*, Paris 1910, p.47. [Séailles (1910)]

28) Séailles (1910), p.46.

だけをとるという点ではローレンツと同様（ただし、横軸の目盛の大小がローレンツとは逆向き）の様式の曲線を描く方法を提案した（図5）。この図法を定式化するときに、セアーユは均等分布直線という言葉は使用していないが、図5に示すように対角線を引いている。そして、この対角線が平等な分布を示し、そこからの乖離が大きく、左下に向かって曲線が湾曲するにしたがって、分布は不平等であると述べている。このように、①縦横の軸に表示される数値のとり方と②横軸の左端を100%、右端を0%としている点を除けば、セアーユは基本的にはローレンツと同様のグラフ法に到達したと言えるが、セアーユとローレンツとの関連性の解明についてはなお今後の課題として残されている。

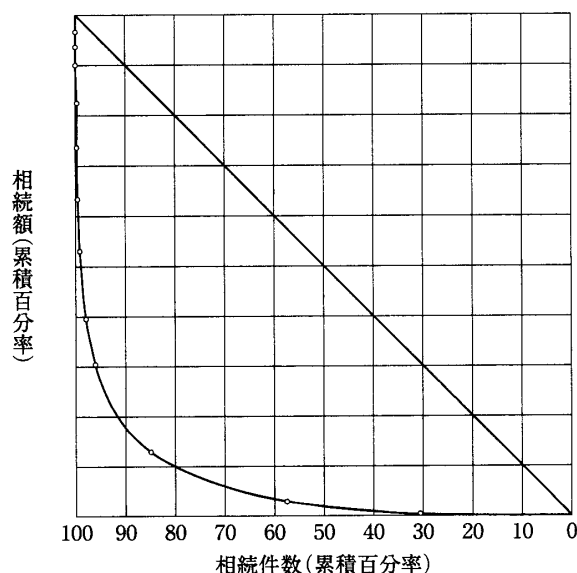


図5 ローレンツ型の集中曲線

- (訳注) 1. 横軸は相続件数の累積百分率(ただし、右端が0%, 左端が100%)。  
2. 縦軸は相続額の累積百分率(ただし、下端が0%, 上端が100%)。  
3. データはシャトラン(図3)に同じ。

(出所) Séailles, J., *La Répartition des Fortunes en France*, Paris 1910, p.56-7 にもとづく。

### 3. グラフ法の改良と集中比

#### (1) グラフ法の問題点

本稿は、ジーニ係数が「集中比」の名のもとで初めて定式化された1914年論文における論点のひとつをとりあげて考察することを目的としていることは、冒頭で述べた。その目的とは、具体的に言えば、ローレンツ曲線(集中曲線)が描く曲線と均等分布直線で囲まれた三日月形の図形の面積(集中面積)とジーニ係数(集中比)との関連を、ジーニの1914年論文にそくして明らかにすることである。ジーニはその論文で集中比  $R$  を

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} \quad (2)$$

ここに、 $p$  : 系列を構成する個体数の累積百分率(個体比率)

$q$  : 系列を構成する項のもつ数量的規定性(ジーニのいわゆる強度)の累積百分率(強度比率)

と定義し、この(2)式から集中比にかんするさまざまな計算式を誘導している。そして、その後、次のように述べている<sup>29)</sup>。

ローレンツ、シャトラン、セアーユなどの論者が富の分布にかんする大小の不平等性を判断するために提案したグラフ法(un metodo grafico)をさらに改良すれば、本稿ですでに提起した比率に到達することになるであろう(強調は引用

29) Gini (1914), p.1229.

者)。

ジーニが「改良」の余地ありと判断したのは、とりわけローレンツのグラフ法である。ジーニがそこに見いだした「不便なこと」とは、ローレンツと(「ローレンツ曲線」の命名者と言われる)ウィルフォード・I. キング(後述)が等しく認めている事柄であり、それは、第一に、集中についての厳密な計測ができないこと、第二には、2本のローレンツ曲線が交差する場合に集中度の比較が難しいということである。

これにたいして、ジーニは、ローレンツ曲線のこの2つの難点を解決する目的ために、集中比が有効であると主張した。上の引用文における「本稿ですでに提起した比率」とは

集中比のことであり、この集中比によって集中面積の数値的特定が可能になれば、ローレンツ曲線にまつわる上述の2つの困難が克服されるとジーニは考えたのである。

## (2) 集中面積

図6に示すように、ジーニが「集中曲線(*curva di concentrazione*)」と名づけたローレンツ曲線を描くときには、縦軸と横軸の値の取り方がローレンツとは逆になっている。このために、ローレンツの1905年論文では上に凸の曲線が、ジーニの1914年論文では下に凸となっている。今日、一般的に見られるように、ローレンツ曲線を図6に示す形状で描くことが、いつから、また誰によって始められたのかは不明である。しかし、軸の数値(累

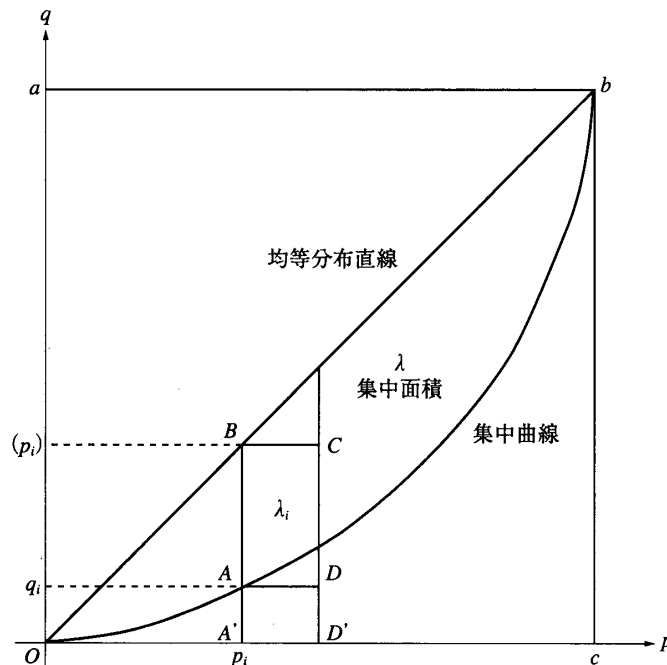


図6 均等分布直線とローレンツ曲線(その1)

(訳注) 1. 横軸の値  $p$  は個体の個数の累積百分率を示す。

2. 縦軸の値  $q$  は個体をもつ(ジーニのいわゆる)強度の累積百分率を示す。

(出所) Gini, C., "Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri," *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Anno accademico 1913-14, Tomo LXXIII, Parte seconda, p.1232 にもとづく。

積百分率)を入れ換えたローレンツ型の曲線は、すでに見たように遅くとも1910年にはシャトランが「相続曲線」として描いており(図3参照)、ジーニよりも4年は早い。ただし、今日、よく見られるローレンツ曲線と同様の形状の曲線が描かれている論文としては、ジーニの1914年論文は古い方に分類される。

なお、キングの『統計的方法の基礎』(1912年)には、すでに「ローレンツ曲線」という呼称が見られ<sup>30)</sup>、セアーユの図5(前出)と同様の形状の曲線がその例として掲載されている。しかし、1914年論文の執筆時点ではすでに見たようにフランスで類似のグラフ法が開発されていたということがあるからであろうか、ジーニは「ローレンツ曲線」という言葉を使用していないことを付言しておく。

ジーニは、集中曲線と均等分布直線(*retta di equidistribuzione*)とで囲まれた図形の面積( $\lambda$ )のことを「集中面積(*area di concentrazione*)」と言っている<sup>31)</sup>。分布が完全に均等である場合( $\lambda=0$ )、すなわち、分布において均等分布直線が成立しているときには、この分布直線が斜辺となり、かつ直角を挟む2辺の長さがいずれも1(=総累積百分率)の直角二等辺三角形 $Obc$ (図6)が描かれる。この三角形の面積は $1/2$ である。この面積を基準

として、集中の度合いを示す $\lambda$ を計測する

と、比率 $\frac{\lambda}{\frac{1}{2}}$ は集中の強さを示す指標となる。

この比率とジーニ係数 $G$ との間には、

$$G = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1) \text{ [再掲]}$$

という数量的関係が成立していることは、今や自明である。上式の $G$ をジーニは集中比 $R$ と名づけているので、ジーニに従えば、(1)式は

$$R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1')$$

と表記できる。1914年論文で集中面積 $\lambda$ と集中比 $R$ が(1')式で示す関係にあることを証明することによって、ジーニはローレンツを超越しようと試みたのである。ここで、ローレンツとジーニの方法論上の違いを確認しておく。すなわち、ローレンツは集中曲線の湾曲を目視して、集中度を比較しようとした。これにたいして、ジーニは集中面積の計測によって数値的に集中度を特定しようとした。

ところが、(1')式の誘導にかんするジーニの論述は簡潔にすぎる。そこで、以下ではジーニの図解を援用して、集中比とローレンツ曲線との間の数学的関係を調べることにする。

図6において横軸( $p$ 軸)は累積百分率であるから、その長さは1である( $\overline{Oc}=1$ )。この横軸を $n$ 等分すれば、そのときに作られる線分はいずれもその長さが等しく、 $1/n$ である( $\overline{A'D'}=\frac{1}{n}$ )。

$p$ 軸上の点 $A'$ から上方へ垂線を引き、ローレンツ曲線(ジーニの集中曲線)との交点を $A$ とし、また均等分布直線との交点を $B$ とす

30) King, Willford L., *The Elements of Statistical Method*, New York 1912, p.156. (ただし、引用は1922年の製版による。) なお、イタリアではウムベルト・リッチが1916年に「ローレンツ曲線」(*curva di Lorenz*)という用語を採用している(Ricci, Umberto, "L'Indice di variabilità e la curva dei redditi," *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, Vol. 53, 1916, p.197)。

31) Gini (1914), p.1231.

る。さらにまた、点  $D'$  から上方へ垂線を引く。この直線と点  $A, B$  からの垂線との交点を、それぞれ  $D, C$  とする。これによって、長方形  $ABCD$  が作図される (図 6 参照)。

ここで、長方形  $ABCD$  の高さ  $\overline{AB}$  がどのように表現されるかを考えてみる。図 6 において、直線  $\overline{Ob}$  は均等分布直線なので、その直線では、一般に

$$p_i = q_i \quad (3)$$

が成立している。したがって、 $\overline{AB} = p_i - q_i$  である。また、長方形  $ABCD$  の底辺  $\overline{AD}$  については、その長さは  $1/n$  である ( $\because \overline{AD} = \overline{A'D'}$ )。以上により、この長方形  $ABCD$  の面積を一般に  $\lambda_i$  とすれば、

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \overline{AB} \times \overline{AD} \\ &= (p_i - q_i) \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となる。

作図のとき、 $\overline{Oc}$  を  $n$  等分したので、長方形  $ABCD$  に類似した (底辺の長さを  $1/n$  とする) 長方形は全部で  $(n-1)$  個できる。したがって、すべての長方形の面積の合計  $\lambda_T$  ( $= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}$ ) は、

$$\begin{aligned} \lambda_T &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i) \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i) \end{aligned} \quad (4)$$

となるが、ここで  $n$  を十分に大きくすると、

$$\lambda_T \rightarrow \lambda \quad (4')$$

となる。ここに、 $\lambda$  は集中曲線と均等分布直

線とで囲まれた図形の面積 (集中面積) である。

次に、長方形  $A'BCD'$  に着目する。長方形  $ABCD$  と同様に点  $B$  においては

$$p_i = q_i \quad (3) \text{ [再掲]}$$

が成立しているから、 $\overline{A'B} = p_i$  である。また、

$$\overline{A'D'} = \overline{AD} \text{ であるから、} \overline{A'D'} = \frac{1}{n} \text{ である。}$$

したがって、長方形  $A'BCD'$  の面積 ( $\tau_i$ ) は、

$$\tau_i = p_i \times \frac{1}{n}$$

となる。よって底辺が横軸上にある長方形  $A'BCD'$  に類似したすべての ( $[n-1]$  個の) 長方形の面積 ( $\tau_T$ ) は

$$\begin{aligned} \tau_T &= \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} p_i \end{aligned} \quad (5)$$

ここで  $n$  を十分に大きくすると、

$$\tau_T \rightarrow \tau \quad (5')$$

となる。ここに、 $\tau$  は三角形  $Obc$  の面積である。

以上にもとづいて、これまでにもとめてきた 2 つの図形の面積 ( $\lambda$  [集中面積] と  $\tau$  [三角形  $Obc$  の面積]) の比の値 ( $\frac{\lambda}{\tau}$ ) をもとめると、(4)式と(4')式および(5)式と(5')式から

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} p_i} \quad (6)$$

よって、



$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} \quad (6')$$

となる。(6')式の右辺は、集中比  $R$  の定義式 [(2)式] と等しいので、

$$R = \frac{\lambda}{\tau} \quad (7)$$

となる。こうして、集中比  $R$  は、分布がローレンツ曲線のように示されるときに2つの面積 ( $\lambda$  と  $\tau$ ) の比率として再定義されたことになる。ジーニはさしあたりこの指摘にとどめている<sup>32)</sup>。そして、 $\lambda$  の面積を  $1/2$  で除したときの商が集中比  $R$  であるということ、すなわち

$$R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1') \text{ [再掲]}$$

という数学的関係については、別に改めて言及している。そこで、この点についてはジーニに従うことにする。ただし、(7)式にもとづけば、ジーニよりも簡単に(1')式にいたることができるので、以下ではジーニの結論を先取りしておく。

### (3) 別解

(1')式を証明するために、 $\overline{Oc}$  を等分する  $n$  の値を限りなく大きくする。このとき、一方の長方形の面積 ( $\lambda_i$ ) の合計  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$  は限りなく  $\lambda$  に近づく。すなわち、

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき,} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \rightarrow \lambda \quad (8)$$

である。

ここで、同様の目的から  $n$  を限りなく大きくすれば、他方の長方形の面積 ( $\tau_i$ ) の合計は三角形  $Obc$  (直角を挟む2辺の長さがそれぞれ1である二等辺三角形) の面積に近づく。すなわち、

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき,} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \rightarrow \frac{1}{2} \quad (9)$$

である。

そこで、 $n$  を限りなく大きくしたときの面積の比の値 ( $\lambda/\tau$ ) としてあたえられる集中比  $R$  [(7)式] は(8)式と(9)式から

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき,} \quad \frac{\lambda}{\tau} (=R) \rightarrow \frac{\lambda}{\frac{1}{2}}$$

となる。したがって、十分大きな  $n$  については、

$$R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1') \text{ [再掲]}$$

が成立する (証明終わり)。

## 4. 集中面積と集中比との数学的関係

### (1) ジーニの作図

ローレンツ曲線を媒介すれば集中比  $R$  が(1')式で再定義されるということを、ジーニは1914年論文でどのように述べているので

<sup>32)</sup> Gini (1914), p.1232f.

あろうか。以下では、図7を用いてジーニの証明<sup>33)</sup>を追跡する。彼の証明の基本方針は、次のとおりである。

- ① 台形  $abb_4a_4$ ,  $a_4b_4b_3a_3$  など、縦軸( $q$  軸)の階級区分に応じて、複数の台形を描き、この台形の面積の合計をもとめる。
- ② その面積の合計から、三角形  $Oab$  の面積( $1/2$ )を減じて、いわゆる集中面積( $\lambda$ )をもとめる。
- ③  $\lambda$  を  $1/2$  (三角形  $Oab$  の面積) で割る。
- ④ この商と集中比の計算式が同一であることをもって、(1')式の証明とする。

## (2) ジーニの証明

ジーニの上記方針に沿って、集中比  $R$  が集中面積( $\lambda$ )と直角二等辺三角形の面積( $1/2$ )との比率としてあたえられることを証明する。

図7の縦軸( $q$  軸)は、ジーニのいわゆる強度の累積百分率である。強度の累積百分率が  $r$  個に階級区分されているとすれば、縦軸上には、端点を除いて  $(r-1)$  個の点がある。想定される多数の階級について階級区分の上限を画する強度を、一般に縦軸上の点  $a_k$  で表し、それに対応するローレンツ曲線上の点を  $b_k$  で表す(横軸における値は  $c_k$  である)。このとき作られる台形(trapezio)  $a_k a_{k-1} b_{k-1} b_k$  の面積  $T_k$  は、

$$T_k = (\overline{a_k b_k} + \overline{a_{k-1} b_{k-1}}) \times \overline{a_k a_{k-1}} \times \frac{1}{2} \quad (10)$$

である。

ここで、第  $k$  番目の階級(第  $k$  階級)における階級内強度の合計を  $S_k$  とおき、すべての

階級に属す個体(その総数は  $n$ )の強度の総計を  $A_n$  とおく。そして、 $\frac{S_k}{A_n}$  という比率を考える。この比率は、系列の強度の総計( $A_n$ )において第  $k$  階級内個体の強度の合計( $S_k$ )がしめる割合である。この割合は、図7では  $\overline{a_k a_{k-1}}$  として表示される。したがって、

$$\frac{S_k}{A_n} = \overline{a_k a_{k-1}} \quad (11)$$

である。

また、 $\overline{a_k b_k}$  は、第  $k$  階級までに属す個体の個数( $i_k$ )がすべての階級に属す個体(個体総数は  $n$ )のなかにしめる割合(第  $k$  階級までに属す個体の累積百分率)であるから、

$$\overline{a_k b_k} = \frac{i_k}{n} \quad (12)$$

である(これは、一般に横軸上の値  $c_k$  で示される)。同様に、 $\overline{a_{k-1} b_{k-1}}$  は第  $(k-1)$  階級までに属す個体の累積百分率であるから、

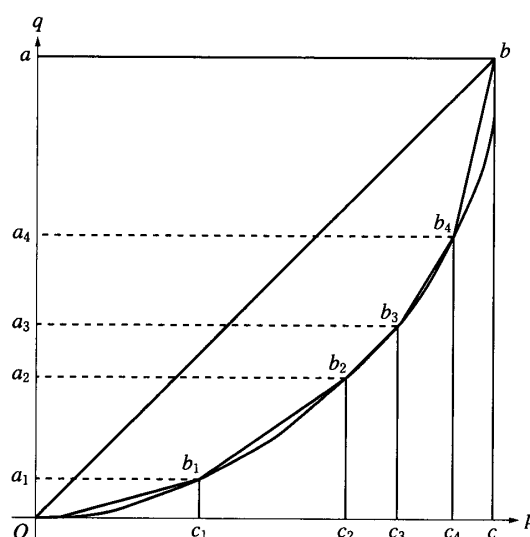


図7 均等分布直線とローレンツ曲線(その2)

(出所) Gini, C., "Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri," *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Anno accademico 1913-14, Tomo LXXIII, Parte seconda, p.1234 にもとづく。

33) Gini (1914), pp.1234ff.

$$\overline{a_{k-1}b_{k-1}} = \frac{i_{k-1}}{n} \quad (13)$$

となる（横軸上の値は  $c_{k-1}$ ）。

(12)式, (13)式, (11)式を(10)式に代入すると,

$$\begin{aligned} T_k &= (\overline{a_k b_k} + \overline{a_{k-1} b_{k-1}}) \times \overline{a_k a_{k-1}} \times \frac{1}{2} \\ &= \left( \frac{i_k}{n} + \frac{i_{k-1}}{n} \right) \times \frac{S_k}{A_n} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{(i_k + i_{k-1}) S_k}{2nA_n} \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。

階級区分の個数は  $r$  なので, (14)式であたえられる台形は全部で  $r$  個ある。 $r$  個の台形の面積の合計  $T$  は

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^r T_k \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{(i_k + i_{k-1}) S_k}{2nA_n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^r (i_k + i_{k-1}) S_k}{2nA_n} \end{aligned} \quad (15)$$

である<sup>34)</sup>。

上でもとめられた図形の面積  $T$  は

- (a) 直角二等辺三角形(三角形  $Oab$ ) の面積  
(b) 集中面積 ( $\lambda$ )

34) ここでは, 直角三角形  $Oa_1b_1$  は, 上底(または下底) がゼロとなる特殊な台形である見なされている。そこで, 三角形  $Oa_1b_1$  の面積 ( $T_1$ ) をもとめるには, 関連データを(10)式に代入すればよい。このとき,

$$\begin{aligned} T_1 &= (\overline{a_1 b_1} + \overline{a_0 b_0}) \times (\overline{a_1 a_0}) \times \frac{1}{2} \\ &= \overline{a_1 b_1} \times \overline{a_1 a_0} \times \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \text{点 } a_0 \text{ と } b_0 \text{ は同一 (原点) で} \\ \text{あるから, } \overline{a_1 a_0} = \overline{a_1 b_0} \text{ である。} \end{array} \right] \\ &= \overline{a_1 b_1} \times \overline{a_1 b_0} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となって, (15)式は図7の  $\overline{Oa}$  と  $\overline{ab}$  および  $\overline{Ob_1 b_2 \cdots b_i \cdots b}$  で囲まれた図形の面積を示す。

に分解される。すなわち,

$$T = \frac{1}{2} + \lambda$$

これを变形すれば,

$$\lambda = T - \frac{1}{2} \quad (16)$$

を得る。

(16)式に(15)式を代入すれば,

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^r (i_k + i_{k-1}) S_k}{2nA_n} - \frac{1}{2}$$

となる。

ここで,  $\lambda$  と三角形  $Oab$  の面積 ( $1/2$ ) の比の値をもとめると, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} &= \frac{\frac{\sum_{k=1}^r (i_k + i_{k-1}) S_k}{2nA_n} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^r (i_k + i_{k-1}) S_k}{nA_n} - 1 \end{aligned} \quad (17)$$

$n$  が十分に大きいときは  $n \approx n-1$  なので, (17)式は

$$\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^r (i_k + i_{k-1}) S_k}{(n-1) A_n} - 1 \quad (18)$$

となる。(18)式の右辺は, ジーニが1914年論文のなかで誘導した集中比  $R$  の近似式と同じである<sup>35)</sup>。よって,

35) ジーニは集中比  $R$  の近似式として,

$$R' = \frac{\sum_{k=1}^r (i_k + i_{k-1} - 1) S_k}{(n-1) A_n} - 1 \quad (*)$$

を誘導した。そして, ジーニは, この  $R'$  が集中比の定義式

$$R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1') [\text{再掲}]$$

が誘導される（証明終わり）。

### (3) 集中比の新しい計算式

1962 年になって、ジニーは、

$$R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1') [\text{再掲}]$$

から、集中比  $R$  の新しい計算式

$$R = \frac{\frac{1}{2} - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(p_{i+1} - p_i)(q_{i+1} + q_i)}{2}}{\frac{1}{2}} \\ = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} (p_{i+1} - p_i)(q_{i+1} + q_i) \quad (19)$$

ただし、 $r$  は累積百分率  $p$  にかんする階級区分の個数。

が誘導されることを示した<sup>36)</sup>。この(19)式は 1914 年論文では見られないが、ジニー係数を計算するときに使用されることがある<sup>37)</sup>。

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} \quad (2) [\text{再掲}]$$

にもとづく  $R$  とは  $R' < R$  の関係にあることを証明している。その上で、ジニーは、十分に大きい  $n$  のもとでは、(\*)式は(17)式で近似できると述べた。そして、(17)式であたえられる集中比の第 2 次近似を  $R'_2$  と表記している [Gini (1914), p.1213]。

36) Gini, C., "Distribution of a Collective Phenomenon: Concentration," *Metron*, Vol.22, 1962, p.172, in his Chap. VIII of "Statistical Methods with special reference to Agriculture," *Metron*, Vol. 20[1960]-Vol.23[1964]. 原著では  $r$  が  $n$  となっているが、引用にあたっては表記を本文の他の箇所と整合させた。

37) 白砂堤津耶『初歩からの計量経済学』日本評論

1962 年論文でもジニーは(19)式について詳しい証明をあたえてはいない。しかし、証明の基本方針を示唆しているので、ジニーの作図を参照して、以下では、独自に証明を試みる(図 8)。

図 8 において、

$$\begin{aligned} & \text{台形 } RSTU \text{ の面積} \\ &= \frac{1}{2} \times (\overline{RS} + \overline{TU}) \times (\overline{OU} - \overline{OR}) \\ &= \frac{1}{2} \times (q_i + q_{i+1}) \times (p_{i+1} - p_i) \\ &= \frac{1}{2} \times (p_{i+1} - p_i) \times (q_{i+1} + q_i) \end{aligned}$$

である。横軸 ( $p$  軸) の座標が  $p_i$  となる点  $K$  を始点として、その軸上に類似の台形を作れば、点  $K$  の右側には台形  $RSTU$  と類似の台形が  $(r-1)$  個作図される(ただし、 $r$  は累積百分率  $p$  にかんする階級区分の個数)。その

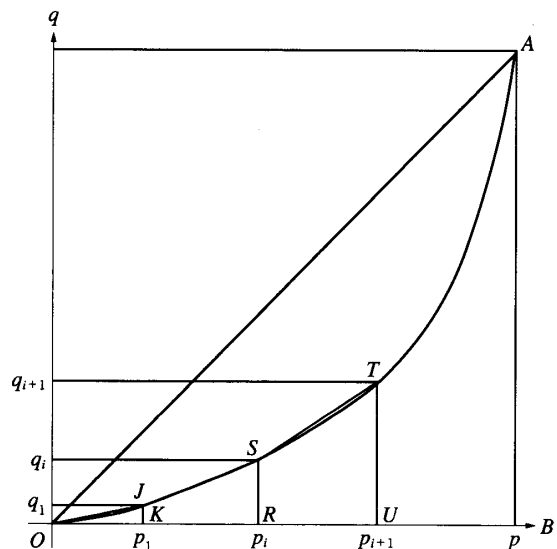


図 8 均等分布直線とローレンツ曲線（その 3）

(出所) Gini, C., "Distribution of a Collective Phenomenon: Concentration," *Metron*, Vol.22, 1962, p.170 にもとづく。

面積の合計  $[(r-1)$  個の台形面積の和] は

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{(p_{i+1}-p_i)(q_{i+1}+q_i)}{2} \quad (20)$$

となる。

点  $K$  より左側には直角三角形  $OJK$  があるだけで、台形を作図することはできない。ところが、この三角形  $OJK$  は上底(もしくは下底)の長さがゼロの台形と見なすことができるので、三角形  $OJK$  の面積を計算するときにも、台形の面積をもとめる公式をあてはめることができる。すなわち、直角三角形  $OJK$  の面積は

$$\frac{1}{2} \times (p_1 - p_0) \times (q_1 + q_0) \quad (21)$$

ただし、 $p_0 = q_0 = 0$

である。

ここで(20)式と(21)式でもとめられた面積を三角形  $OAB$  の面積  $(1/2)$  から引くと、ジーニのいわゆる集中面積  $\lambda$  を計算することができる。すなわち

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} - \{ (r-1) \text{ 個の台形の面積の和} \\ &\quad + \text{直角三角形 } OJK \text{ の面積} \} \\ &= \frac{1}{2} - \left\{ \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(p_{i+1}-p_i)(q_{i+1}+q_i)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p_1-p_0)(q_1+q_0)}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(p_{i+1}-p_i)(q_{i+1}+q_i)}{2} \end{aligned}$$

集中比  $R$  は集中面積  $\lambda$  と三角形  $OAB$  の面積  $(1/2)$  との比率であること [(1')式] は証明済みであるから [(7)式参照],

$$R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad (1') \text{ 式[再掲]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(p_{i+1}-p_i)(q_{i+1}+q_i)}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{r-1} (p_{i+1}-p_i)(q_{i+1}+q_i) \quad (19) \text{ [再掲]}$$

よって、(19)式が(1')式の系として誘導された(証明終わり)。

## む す び

以上、本稿では、ローレンツ曲線とジーニ係数との間の数学的関係にかんするジーニの見解を、その1914年論文にそくして見てきた。その結果、次のように要約できる。

- (1) ローレンツ曲線を用いた所得分析の方法(グラフ法)は、アメリカでは肯定的に評価されていた。
- (2) ローレンツ曲線が考案された頃、少し遅れてフランスでも同様のグラフ法が開発された。しかし、本稿ではアメリカでの議論とフランスでの議論との関係の解明にはいたらなかった。
- (3) ジーニはローレンツ曲線と集中比(ジーニ係数)との数学的関係を考察するとき、作図によった。その図では、縦軸と横軸の数値がローレンツとは入れ替わり、横軸に個体の累積百分率、横軸にいわゆる強度の累積百分率がとられている。ジーニと同様の軸の取り方は、フランスで展開されたグラフ法ですでに採用されていた。したがって、両軸の入れ替えのオリジナリティが

ジーニにあるとは即断できない。しかし、たとえ、この点についてジーニのオリジナリティが否定されたとしても、ジーニ係数がその後の所得分布研究に果たした意義は減殺されない。

- (4) ローレンツ曲線(ジーニの言う集中曲線)の欠陥であるとジーニが指摘したのは、目視による比較対照の困難性である。ローレンツのグラフ法による所得分析では、曲線の湾曲の程度が目視によって比較され、このために、複数の曲線が近接したり、あるいは交差したりする場合には、集中度にたいする確実な判断にいたらないとジーニは考えたからである。
- (5) ローレンツのグラフ法に付帯するこの困難を克服するには、集中曲線と整合的な単一の数値的尺度が必要であるとジーニは考えた。そして、集中比がこの役割を果たす測度であることを明らかにした。
- (6) ジーニは、均等分布直線と集中曲線(ローレンツ曲線)で囲まれた面積(集中面積  $\lambda$ )を計測し、集中比  $R$  が、完全平等( $\lambda=0$ )の場合に作られる直角二等辺三角形の面積( $1/2$ )と不均等分布の場合の集中面積( $\lambda$ )との比率に等しいこと、すなわち

$$R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}}$$

を証明した。これによって、ジーニ係数(集中比)とローレンツ曲線との間の数学的関係が明らかになった。

ジーニはローレンツのグラフ法を集中比によって「改良」としようと試みた。ローレンツ

曲線の湾曲状態から集中度を判断するときに避けがたい不明瞭性は、ジーニの集中比(ジーニ係数)によって克服されたと考えることができる。しかし、ローレンツ曲線の困難性を克服したとは言っても、ローレンツ曲線そのものがもっている特徴を、その基本から「改良」するものではなかった。すでに指摘されているように、所得を有する者の所得がすべて同率で変化するときや、あるいはすべての所得階級で同率にその人数(あるいは世帯数)が変化するときには、所得格差がローレンツ曲線の違いとなって現れることはない。また、ローレンツ曲線は、社会全体の所得分布の集中度を図示するために、富裕な個人が貧困化したり、逆の現象が特定個人に見られたりしても、総人数と総所得が変らなければ曲線の形状にはその変化が反映されない(高山憲之はローレンツ曲線に見られるこの特徴を「匿名性」と名づけている<sup>38)</sup>)。ジーニの集中比によって、ローレンツ曲線が示す分布の集中度は具体的な数値で特定されて、ローレンツ曲線による判断の曖昧さが克服されたとしても、上述したローレンツ曲線の特徴は、そのままジーニの集中比にも継承されている。それでは、そのような特徴をもつジーニ係数が、所得分布研究に依然として多用されるのはなぜであろうか。

すでに述べたように、集中比は、いわゆる集中面積と均等分布直線を斜辺とする直角二等辺三角形の面積との比率である。このことは、集中比という測度が、ローレンツ曲線を前提とする集中面積を相対的に計測した「総

38) 高山憲之「富と所得の分布」『経済学大辞典(第2版)』I 東洋経済新報社 1980年, p.470以下。

合指数」であることを意味する。ローレンツ曲線による所得分析の特徴（長所と短所）をそのまま受け継いだ総合指数としての集中比（ジーニ係数）は、所得分布の分析の分野で一般に普及しているが、その理由のひとつとして、ここでは、それが、ローレンツ曲線という視覚的な手段をもっていることを指摘しておきたい。ローレンツ曲線の助けを借りて初めて、総合指数として抽象的なジーニ係数の意味する事柄がより明証的になったと考えられるからである。ローレンツ曲線あつてのジーニ係数と言うことができる。この意味では、ジーニ係数にたいして果たすローレンツ曲線の意義は大きい。

次に、ジーニが集中比を構想するにあたって果たしたローレンツの役割についても触れておく。ジーニは、パレートによる所得分析研究に沿って、「集中指数（いわゆるジーニ指数）」を定式化した<sup>39)</sup>。ところが、この集中指数は、所得分布を含めた分布一般が特定の関数関係で表現されることを要請する。この要請が満たされない場合における分布の集中度を計測することの必要性から、ジーニは集中比を定式化するにいたった。そのとき、関数関係を想定しない所得分布研究としてジーニが着目したのは、ローレンツやシャトラン、セアユなどのグラフ法であった。とりわけ、ジーニが重視したのは、ローレンツのグラフ法であった。ところが、このグラフ法では集

中度の比較は目視によらざるをえない。この点にジーニは、アメリカ生まれのこのグラフ法に「改良」を加える余地があると見た。このことを想起するとき、ローレンツがあたえたジーニにたいする理論的な影響を否定することができない。

最後に、集中比という測度から見たジーニ理論の意義に言及する。「集中指数」の研究を終えたジーニは、関数関係にない分布における「変動性指数」の一種としての「平均差」（単一の統計系列の構成要素を2つずつ組み合わせたときに得られる強度間の差の相加平均）を研究した<sup>40)</sup>。これを受けて、集中比が初めて公表された1914年論文においては、集中比と平均差との間の数学的関係も証明されている。その意味では、集中比そのものは、ローレンツ曲線を前提としなくても、計算することが可能である。実際にも、集中比の計算例としてジーニが初めて用いた数値例はアメリカ先住民の心拍数にかんするデータであり、そのときに用いた計算式は(2)式（集中比の定義式）の系として誘導された式である<sup>41)</sup>。そこ

では(1')式  $(R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}})$  は用いられてはい

ない（また、平均差による計算式も用いられていない）。したがって、ローレンツ曲線がなくても（また、平均差の概念がなくても）、集中比は誕生したと言えるかもしれない。しか

39) ① Gini, C., "Il diverso accrescimento delle classi e la concentrazione della ricchezza," *Giornale degli Economisti*, Serie seconda, Volume XXXVIII, 1909; ② ditto, "Indici di concentrazione e di dipendenza," *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Terza Riunione, Padova, Settembre 1909*, Roma 1910.

40) Gini, C., "Variabilità e Mutabilità, contributo allo studio delle distribuzioni e delle relazioni statistiche," *Studi Economico-Giuridici della R. Università di Cagliari*, Volume III, Parte seconda, 1912.

41) Gini (1914), pp. 1209ff.

し、ローレンツ曲線との関連性を明らかにすることによって、集中比は単なる総合指数としてではなくて、図示できる理解可能な測度となることができた。図解と総合指数たる集中比を結びつけたのは、 $R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}}$ という数学

的關係である。この關係を証明したことはジーニの功績であると言えよう。なお、この点にかんして付言しておきたいことがある。

それは $R = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}}$ を $R = 2\lambda$ と変形して、集中

比（ジーニ係数）を集中面積 $\lambda$ の2倍とする定義についてである。この定義は今日でも見られるが、ジーニの1914年論文が掲載された『ヴェーネト州帝室学士院科学・文学・芸術紀要』の翌号（1914-15年号、第74巻）にすで

に見ることができる。ガエターノ・ピエトラは「ジーニの集中比……は……集中面積の2倍によって計測される。」（強調はピエトラ）と述べている<sup>42)</sup>。数学的にはそのとおりである。集中比の計算途上で $R = 2\lambda$ を使用することはありえても、それを集中比の定義式として

しまえば、均等分布（1/2）を基準に集中の度合（集中面積）を相対的に計測しようとして、ジーニがあえて $R$ を比率（rapporto）と規定したことの真意が見失われるのではあるまいか。

所得分布の計測指標として今日でもその意義を失っていない集中比（ジーニ係数）の理論的形成を明らかにする一環として本稿は執筆された。グラフ法にかんする先行研究とジーニ理論との関連性には不明の点もあって、その解明は今後の課題として残されている。しかし、なお、1914年論文にとどまって、検討することも残されているように思われる。それは、集中比と平均差との間の数学的關係である。ジーニの1914年論文では、平均差によっても、集中比が定義されている。このことを明らかにした論文として、ジーニによるコールズ委員会報告（1936年）<sup>43)</sup>が引かれることがある。しかし、平均差を用いた集中比の再定義は、それよりも20年以上前に、集中比が最初に定式化された1914年論文ですでにあたえられている。このことについて1914年論文に即した検討がさしあたり今後の課題である。

42) Pietra, Gaetano, "Delle relazioni tra gli indici di variabilità," *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Anno accademico 1914-15, Tomo LXXIV, Parte seconda, p.780.

43) Gini, C., "On the Measurement of Concentration with Special Reference to Income and Wealth," *Abstracts of Papers presented at the Cowles Commission Research Conference on Economics and Statistics*, Colorado 1936, p.77.