開発論集　第115号　25-30（2025年３月）

相異なる二つの凸領域の境界線達の共通部分について

山　本　隆　範*

１．問題の背景（cf. K. Kimura（木村　和範）[2]）

経済学や経営学の諸問題を考えるとき様々な疑問が出てくる。統計学や数学問題を考えるときは，定義や定理や定理の証明がそれ自体難解であるとき，たとえそれが誤りではなく正しいものと認められたことであっても，それを論理的に正しいことを確かめようとするとき，多くの疑問が生じることがある。今回は経済学や経営学における難解な理論を理解するために必要になるであろう予備知識として相異なる二つの凸領域の境界線達の共通部分についての考察を行う。

第１種と第２種の微分方程式

最初に少なくとも２つの相異なる凸関数解をもつような微分方程式 $\mathscr{D}$ を与える。そしてその解空間 $\mathscr{S}$ の中から２つの凸関数 $f(x), g(x)$ を選出する。更に，この２つの凸関数 $f(x), g(x)$ の定義域の共通部分に含まれる部分区間 I を選出する。このようにして得られた三つ組 (f, g, I) に対し，２つの凸集合 A, B を

$$A=\{(x,y): x\in I,\quad y\geq f(x)\},$$
$$B=\{(x,y): x\in I,\quad y\geq g(x)\}$$

と定める。このような凸集合の境界線達を

$$\partial A=\{(x,y): x\in I,\quad y=f(x)\},$$
$$\partial B=\{(x,y): x\in I,\quad y=g(x)\}$$

と定める。このとき，∂A と ∂B の共通部分を $\partial A\cap\partial B$ と表し，集合 $\partial A\cap\partial B$ の元の個数を

$$\sharp(\partial A\cap\partial B)$$

と表す。

Definition 1.1.　n を非負整数とする。もし或る三つ組み (f, g, I) が存在して

$$\sharp(\partial A\cap\partial B)\geq n$$

---

*（やまもと　たかのり）北海学園大学開発研究所研究員，北海学園大学工学部教授

ならば，最初に与えられた微分方程式 $\mathscr{D}$ は第 1 種 n 型の微分方程式と呼ばれる。

Definition 1.2. 任意の非負整数 n に対して第 1 種 n 型の微分方程式は第 1 種 ∞ 型の微分方程式と呼ばれる。

Theorem 1.1. 全ての微分方程式は第 1 種 0 型の微分方程式である。

Theorem 1.2. 任意の正の整数 n に対して，第 1 種 n 型の微分方程式は自動的に第 1 種 $n-1$ 型の微分方程式である。

最初に与えられた微分方程式 $\mathscr{D}$ の解曲線達の中で少なくとも 2 つの解曲線の縮閉線の方程式が凸関数で与えられるとき，$\mathscr{D}$ を第 2 種の微分方程式と呼ぶ。

2．第 1 種 3 型の微分方程式の例（cf. K. Ishiguro（石黒　一男）[1]）

$I=[1,3]$ とする。この章では，微分方程式

$$\frac{d^5y}{dx^5}=0$$

は第 1 種 3 型の微分方程式であることが示される。このとき

$$y=C_0x^4+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$$

と書ける。C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 は任意の値でよいから，解は無限個ある。

Theorem 2.1. 微分方程式

$$\frac{d^5y}{dx^5}=0$$

は第 1 種 3 型の微分方程式である。

Proof. 微分方程式 $y^{(5)}=0$ の解空間の中から 2 つの関数

$$f(x)=3x^4+4x^3+5x^2+6x+7,$$

$$g(x)=2x^4+10x^3-6x^2+12x+7$$

を選出する。これらは区間 $I=[1,3]$ 上の凸関数である。2 つの凸集合 A, B を

$$A=\{(x,y):x\in I,\quad y\geq f(x)\},$$

$$B=\{(x,y):x\in I,\quad y\geq g(x)\}$$

と定める。このような凸集合の境界線達を

$$\partial A=\{(x,y):x\in I,\quad y=f(x)\},$$

$$\partial B = \{(x, y) : x \in I, \quad y = g(x)\}$$

と定める。このとき，これらの共通部分は

$$\partial A \cap \partial B = \{(1, 25), (2, 19), (3, 421)\}$$

となる。従って

$$\sharp(\partial A \cap \partial B) = 3$$

となる。故に，$y^{(5)} = 0$ は 3 型の微分方程式である。　□

（付記）　実は，上記の証明で選出した三つ組 (f, g, I) を次のように変更すると，微分方程式

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = 0$$

は第 1 種 4 型の微分方程式であることを示すことができる。

$$f(x) = x^4,$$
$$g(x) = 5x^2 - 4,$$
$$I = (-\infty, \infty).$$

与えられた微分方程式は第 1 種 4 型だから，自動的に第 1 種 3 型にもなっている。

3．第 1 種 ∞ 型の微分方程式の例（cf. K. Ishiguro（石黒　一男）[1]）

$I = (-\infty, \infty)$ とする。この章では，微分方程式

$$\frac{d}{dx} \frac{\frac{d^5 y}{dx^5}}{\frac{d^3 y}{dx^3}} = 0$$

は ∞ 型の微分方程式であることが示される。

Theorem 3.1.　微分方程式

$$\frac{d}{dx} \frac{\frac{d^5 y}{dx^5}}{\frac{d^3 y}{dx^3}} = 0$$

は ∞ 型の微分方程式である。

Proof.　3 つの実数達 a, b, c は条件

$$2a \geq b^2, \quad 2a \geq c^2, \quad b \neq c, \quad b \neq -c$$

を満たすとする。このとき，微分方程式

$$\frac{d}{dx}\frac{\frac{d^5y}{dx^5}}{\frac{d^3y}{dx^3}}=0$$

の解空間の中から２つの関数

$$f(x)=ax^2+\sin bx,$$
$$g(x)=ax^2+\sin cx$$

を選出する。これらは区間 $I=(-\infty,\infty)$ 上の凸関数である。２つの凸集合 A,B を

$$A=\{(x,y):x\in I,\quad y\geq f(x)\},$$
$$B=\{(x,y):x\in I,\quad y\geq g(x)\}$$

と定める。このような凸集合の境界線達を

$$\partial A=\{(x,y):x\in I,\quad y=f(x)\},$$
$$\partial B=\{(x,y):x\in I,\quad y=g(x)\}$$

と定める。このとき，これらの共通部分は

$$\partial A\cap\partial B$$
$$=\left\{\left(\frac{2n\pi}{b-c},f\left(\frac{2n\pi}{b-c}\right)\right):n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(\frac{(2n+1)\pi}{b+c},f\left(\frac{(2n+1)\pi}{b+c}\right)\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$$

となる。従って

$$\sharp(\partial A\cap\partial B)=\infty$$

となる。故に，微分方程式

$$\frac{d}{dx}\frac{\frac{d^5y}{dx^5}}{\frac{d^3y}{dx^3}}=0$$

は ∞ 型の微分方程式である。　□

４．第２種１型の微分方程式の例（cf. H. Suzuki（鈴木　丕章）[3]，T. Takagi（高木　貞治）[4]）

$I=(-\infty,\infty)$ とする。この章では，零でない実数 a に対して微分方程式

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{2}{ay}\right)^2+1=0$$

の解を $y=f(x)$ と定めるとき，曲線 $y=f(x)$ の縮閉線の方程式は凸関数であることが示される。故に，微分方程式

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{a}{y}\right)^2+1=0$$

は第 2 種 1 型の微分方程式となる。この方程式の左辺第 1 項が $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ でなしに $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$ であることに注意する。

Theorem 4.1. 零でない実数 a に対して，微分方程式

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{2}{ay}\right)^2+1=0$$

は第 2 種 1 型の微分方程式である。

Proof. 与えられた微分方程式の解を $y=f(x)$ と定めるとき，曲線 $y=f(x)$ の縮閉線の方程式を $y=g(x)$ と定める。このとき，

$$g(x)=\frac{1}{a}(e^{a(x+b)}+e^{-a(x+b)})$$

となることが知られている。故に，曲線 $y=g(x)$ は懸垂線を平行移動したものである。故に，$g(x)$ は凸関数である。故に，与えられた微分方程式は第 2 種の微分方程式である。この懸垂線達の中から 2 つの関数

$$f(x)=\frac{1}{a}(e^{ax}+e^{-ax}),$$

$$g(x)=\frac{1}{a}(e^{a(x+b)}+e^{-a(x+b)}),$$

を選出する。これらは区間 $I=(-\infty,\infty)$ 上の凸関数である。2 つの凸集合 A, B を

$$A=\{(x,y):x\in I,\quad y\geq f(x)\},$$
$$B=\{(x,y):x\in I,\quad y\geq g(x)\}$$

と定める。このような凸集合の境界線達を

$$\partial A=\{(x,y):x\in I,\quad y=f(x)\},$$
$$\partial B=\{(x,y):x\in I,\quad y=g(x)\}$$

と定める。このとき，これらの共通部分は

$$\partial A\cap\partial B=\left\{\left(\frac{-b}{2},f\left(\frac{-b}{2}\right)\right)\right\}$$

となる。従って，$\sharp(\partial A\cap\partial B)=1$. 故に，与えられた微分方程式は第 2 種 1 型の微分方程式である。 □

参考文献

［1］K. Ishiguro（石黒　一男　他 3 名）基礎課程 微分積分学，1981.

［2］K. Kimura（木村　和範）private communication，2018.
［3］H. Suzuki（鈴木　丕章）preprint，1975.
［4］T. Takagi（高木　貞治）解析概論，岩波書店，1975.