

タイトル	棒部材の構造安定問題：梁と柱と梁柱の違い
著者	当麻，庄司
引用	工学研究：北海学園大学大学院工学研究科紀要，8: 3-9
発行日	2008-09-28

棒部材の構造安定問題 —— 梁と柱と梁柱の違い ——

当 麻 庄 司*

Structural Stability of Bar Members —— Differences in Beam, Column and Beam-Column ——

Shouji Toma*

1. まえがき

構造物によく用いられる棒部材には、柱、梁そして梁柱がある。柱は軸方向圧縮力を受ける部材、梁は曲げを受ける部材、そして梁柱は軸方向圧縮力と曲げの両方を受ける部材と定義される。このことから、梁柱は単純に梁と柱を合わせた部材のようにも見られるが、そうではない。梁柱では軸方向圧縮力と曲げモーメントが相乗作用をするので、単純に梁と柱を重ね合わせた挙動とはならない。また、柱と梁柱は2次元問題として扱われるので比較的単純であるのに対し、梁の安定問題はねじりが作用する3次元問題として扱われ、最も複雑である。これらの部材の安定問題を考慮した耐荷力の研究は、それぞれ性格が異なる部材として別々に行われてきた。

構造解析における非線形性は、材料的非線形と幾何学的非線形に分かれる。材料的非線形は、構造解析において最も基礎となる応力—ひずみ関係を比例ではない非線形として取り扱う。この場合、部材断面や部材（または構造物全体）の力—変形関係は、コンピューターを力任せに利用した数値積分によってしか得ることができない。

一方、幾何学的非線形は、部材や構造物の変形による2次モーメントを考慮した解析である。ここでは材料を線形として扱うため、単純な荷重に対して微小変形の範囲内と仮定すれば厳密な解が得られる。これらの厳密解は式がかなり複雑になるが、いくら複雑でも厳密解が得られる限り、現在ではコンピューターによる計算を簡単に行うこ

とができる。しかし、実務の設計ではこのような複雑な式は扱いづらいので、簡略化した設計式が設計基準に提案されている。

構造物の座屈安定問題は、土木学会や建築学会でよくまとまった文献が発刊されており¹⁾²⁾、また、多くの参考図書や教科書も存在する^{3~8)}。ここでは、そのうち棒部材である柱と梁と梁柱の3部材間の座屈安定問題について、上に述べたような事項をさらに詳しく解説し、設計基準⁹⁾¹⁰⁾の理解の一助とする。

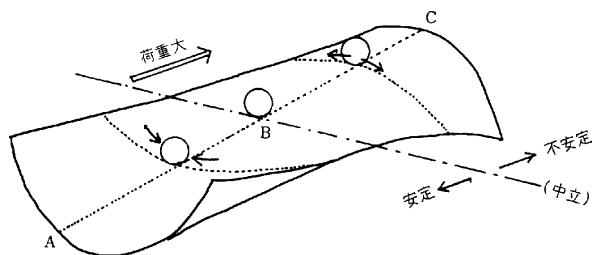
2. 柱の安定

2.1 柱の支配方程式

柱は、ある値に到達すると座屈によって曲がる。部材が完全にまっすぐで、ちょうど部材軸の中心に軸方向圧縮力が作用してもはたして部材は座屈で曲がるのか、この質問を学生にすると半数ほどは曲がらないと答える。しかし、図-1に示す不安定領域の曲面上にあるボールが、いかに曲面が完全であっても落ちてしまうように、座屈は起こるのである。通常は力の作用方向に部材は変形するから、軸方向に力が作用するとその方向にのみ変形すると思われがちである。柱の座屈のように、曲げる力が働いていないのに曲がることのイメージが一般にはつかみ難い。この錯覚から、実際によく事故も起こっている。

構造物は完成時を想定して設計されているので、完成後には容易に壊れないが、建設途中では

* 北海学園大学大学院工学研究科建設工学専攻（土木系）
Graduate School of Engineering (Civil Eng.) Hokkai-Gakuen University



図－1 安定の概念図

様々な状況が起こり得るので、座屈の危険性が見逃されやすい。杭打ち機やジャッキの転倒事故なども構造安定問題の一つで、これらは水平力がなくまっすぐに立っていれば傾かないと考えがちであるが、支持基盤が軟らかいと図－1の概念図の不安定領域で示したように不安定になるのである。杭打ち機やジャッキの転倒条件は、重心の高さと支持基盤の剛性から決まる。

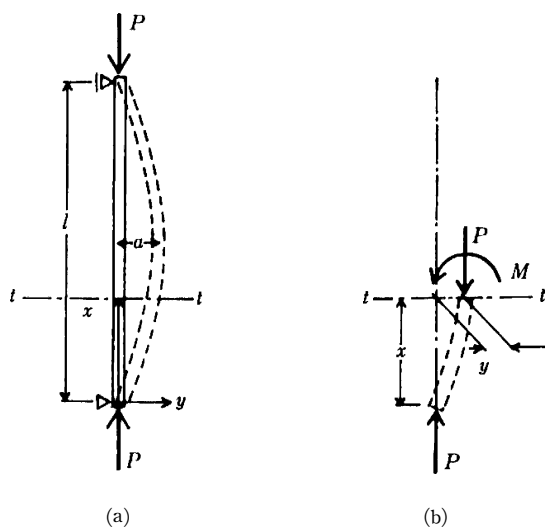
柱の安定は、荷重がある値（固有値）になると座屈する固有値問題として扱われる。その支配方程式は図－2に示す釣り合い状態から次の微分方程式で表される。

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0 \quad (1)$$

上式を満足する荷重 P を解いて得られた固有値の最小は、周知の次式で与えられる。

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2)$$

上式は約 260 年も前にオイラーにより導かれ、弾性座屈荷重を与えるものである。



図－2 柱の力の釣り合い

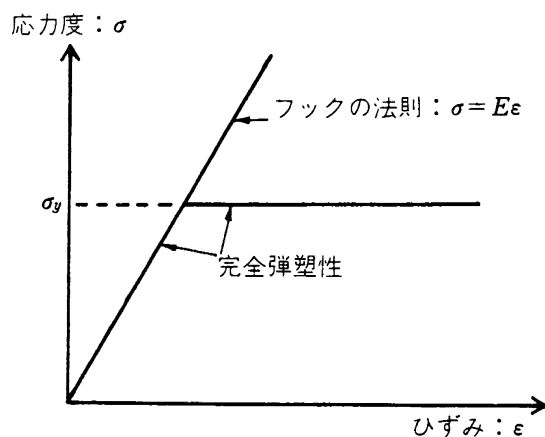
2.2 柱の設計

式(1)を発見したオイラー（Euler）の時代には、人々はこの理論の正当性をなかなか信じられなかった。それは、材料非線形との関係が解明されなかったからである。式(1)をみるとわかるように、部材の長さ l が小さくなると座屈荷重は無限大に近づく。部材が無限の強さをもつことは、実際の現象とは相容れないため理解されなかったのであるが、これは座屈よりも先に材料が降伏していること、すなわち材料が非線形領域に到達していることの理解が不足していたのである。

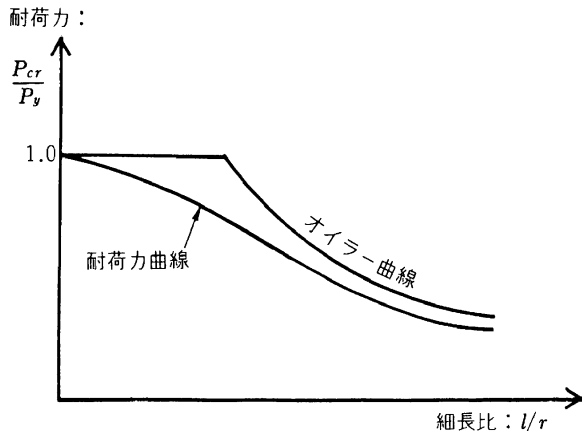
式(1)は図－3に示す応力－ひずみ関係にフックの法則が成り立つ範囲内でしか成立しない。ところが、実際には材料の強度には限界があり、その強度の基準として降伏応力度 σ_y がとられる。式(1)の EI は曲げ剛性である。したがって、座屈は曲げ剛性 EI の最も小さい方向に起こることがわかる。それでは、なぜここに円周率 π が関係するのであろうか。その理由は、座屈する部材がサイン波の形状に曲がることからくる。

柱部材の実際の強度は、弾性理論のオイラー荷重や材料の降伏強度だけでは決まらない。現実の部材には初期不整とよばれる不完全性が含まれており、図－4の耐荷力曲線で示すように、これらの理論的強度を低下させる。柱の初期不整としては、初期たわみと残留応力がある。これらは、部材の製造過程で溶接等により生まれるものである。

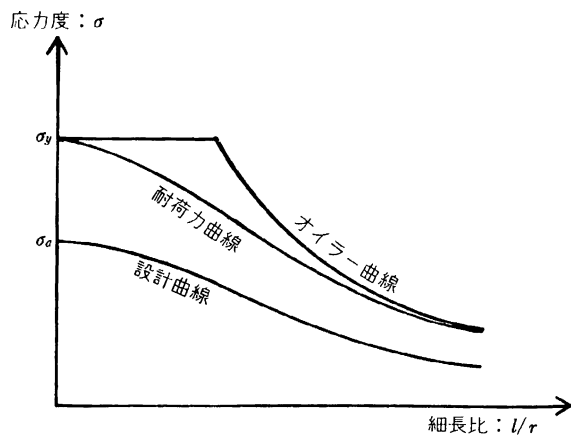
わが国の鋼構造設計は、主として許容応力度設計法により行っているので、柱の安全照査は作用応力度が許容応力度を超えないようにする。軸圧縮許容応力度は、図－5の設計曲線に示すように、



図－3 応力－ひずみ曲線



図－４ 柱の耐力力曲線（荷重）



図－５ 柱の設計曲線（応力度）

図－４の耐力力曲線を応力度で表し、それを安全率で除して用いる。

3. 梁柱の安定

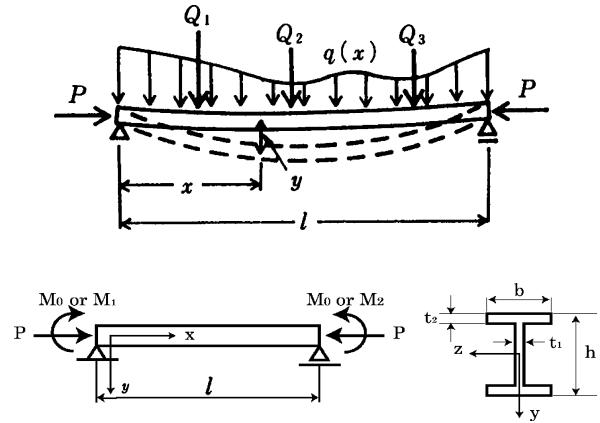
3.1 梁柱の支配方程式

梁柱は、図－６に示すように、部材に軸方向圧縮力と曲げモーメントを受ける。この問題では、 $x-y$ の平面問題として取り扱い、面外方向の変形は考えない。また、図－１０に示すような局部座屈も考慮しない。これらの要素を含めると解析解が得られにくいので、一般に梁柱の解析では考えない。

梁柱の支配方程式は、例えば図－６の下段に示すように、両端に等曲げモーメント M_0 を受ける場合、次の式で表される。

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = -M_0 \quad (3)$$

上式は柱の支配方程式(1)に比較して、右辺に曲



図－６ 梁柱部材

げモーメントの荷重項が存在し、この式の解は応力－ひずみ関係（図－３参照）が線形である限り厳密解が求められる。

柱は、梁柱において曲げモーメント M_0 が作用していない特殊なケースとみなすことができる。そのように考えると、柱も梁柱の中を含めることができる。

3.2 梁柱の重ね合わせの原理

梁と梁柱の違いを理解するために、重ね合わせの原理について考えてみよう。線形解析において梁に複数の横荷重が作用する場合、個々の荷重による断面力やたわみを単純に加え合わせればよい。しかし、梁柱の場合は図－７に示すように、個々の横荷重に対して、軸圧縮荷重 P は常に作用しているものとして重ね合わせをしなければならない。梁柱においては、微小変形と材料の線形を仮定する限り、このように軸力による２次モーメントを常に考慮しながら、個々の単一荷重に対する梁柱の解を重ね合わせることができる。

3.3 梁柱の設計

骨組み構造物の鉛直部材は、すべて軸圧縮力と曲げモーメントが作用する梁柱とみなすことができる。水平方向の部材は、通常軸力が小さいので梁部材とみなされる。わが国における梁柱の設計は、米国の設計基準¹¹⁾にならうところが大きく、以下その説明になる⁶⁾¹²⁾。

骨組み構造物の一部材を取り出すと、部材の中間に荷重が作用しないとすれば、図－８(a)に示すような両端に不等曲げモーメントを受けている部

材とみなすことができる。この部材の最大曲げモーメントは部材のどこか中間に生じることがあっても、厳密な解として求めることができる。設計においてはこの最大曲げモーメントに抵抗できるようにする。この厳密解の式は複雑であるので、設計ではこれを簡略化する。

簡略化の手順は、図-8(b)に示すように、不等端モーメント M_1 , M_2 ($M_1 > M_2$) を同じ最大曲げモーメントになるような両端の等価モーメント M_{eq} に置換することによって行われる。この等価換算曲げモーメントは、次式で算出される⁶⁾。

$$M_{eq} = C_m M_1 \quad (4)$$

ここに、等価曲げモーメント換算係数 C_m の厳密解は、図-9の曲線で示すように、横軸 M_2/M_1 に対して軸力 P で異なる曲線となる。

この厳密解は設計には使いづらいので、簡略化した Austin による直線式が図-9に示されており、それは次式で表される。

$$C_m = 0.6 + 0.4(M_2/M_1) \quad (5)$$

ただし、 $-1 < M_2/M_1 < 1$

上式に下限値の制限 ($C_m > 0.4$) を設けたものが、わが国の道路橋設計示方書⁹⁾等の設計基準で用いられている。この下限値の制限は、図-9をみると理論的には不要であると判断される。こうして、等価曲げモーメント M_{eq} が求まると、最大曲げモーメント M_{max} はこれに軸力 P による増幅係数 A_F を乗じて得られる。

$$M_{max} = A_F M_{eq} \quad (6)$$

$$A_F = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} \quad (7)$$

式(7)から、作用軸力 P がオイラー P_E 荷重（式(2)）に近づくと、増幅係数は無限大になることがわかる。すなわち、軸力がオイラー荷重になれば、軸力だけで座屈することになる。梁柱の設計は、このようにして求めた最大曲げモーメントと軸力に抵抗できるように行われる。

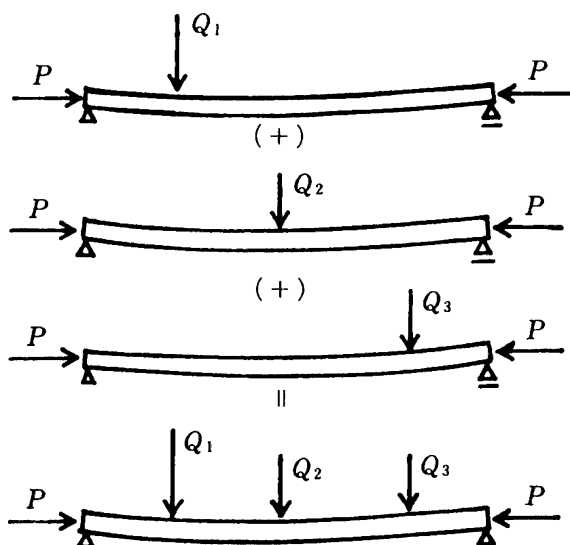


図-7 梁柱の重ね合わせの原理

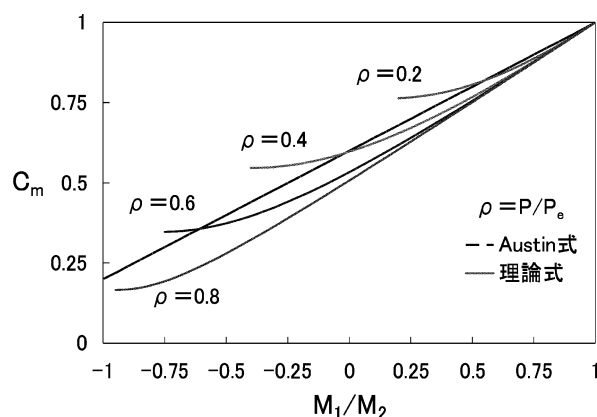


図-9 梁柱の等価換算曲げモーメント算出式の比較⁶⁾

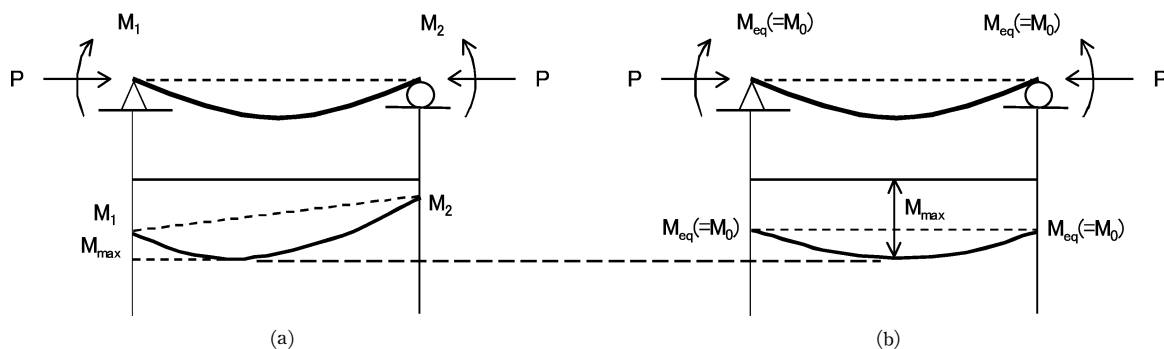


図-8 不等端曲げモーメントを受ける梁柱の等価換算曲げモーメントの概念

4. 梁の安定

4.1 梁の支配方程式⁶⁾

梁の理論的な安定問題は、通常図-10 に示すような上フランジやウェブの局部座屈は考慮しないで、全体座屈が生じるものとして扱われる。したがって、梁の設計ではこれらの局部座屈が生じないように板厚の決定や補剛材の取り付けが行われる。

梁の全体座屈は図-11 に示すように、強軸に関して曲げを受けるとき圧縮フランジが横方向（弱軸方向）に倒れる現象となる。したがって、部材にはねじりを伴い、また面外方向の変位が関係する3次元問題となる。この座屈は、弱軸に曲げを受けるときには生じない。

梁の座屈変形時におけるねじり抵抗の式は、部材のねじり抵抗（純ねじり） T_{sv} とフランジの曲げ抵抗（そり） T_w の二つの部分からなり、次式のよう表される。

$$T = T_{sv} + T_w = GJ \frac{d\phi}{dx} - EC_w \frac{d^3\phi}{dx^3} \quad (8)$$

ここに、 GJ はねじり剛性、 EC_w はそり剛性である。 G, E は、それぞれせん断弾性係数および縦弾性係数（ヤング率）で、材料の性質である。 J, C_w は、それぞれねじり定数およびそり定数で、断面の性質である。 ϕ は図-12 に示すように、ねじりによる部材断面の回転角である。

純ねじりは図-13 に示すように、丸棒では均等なねじりが生じ、I 型断面では断面のそりに対する抵抗がない状態でのねじりをいう。それに対して、そりねじりは図-14 に示すように、そり（反

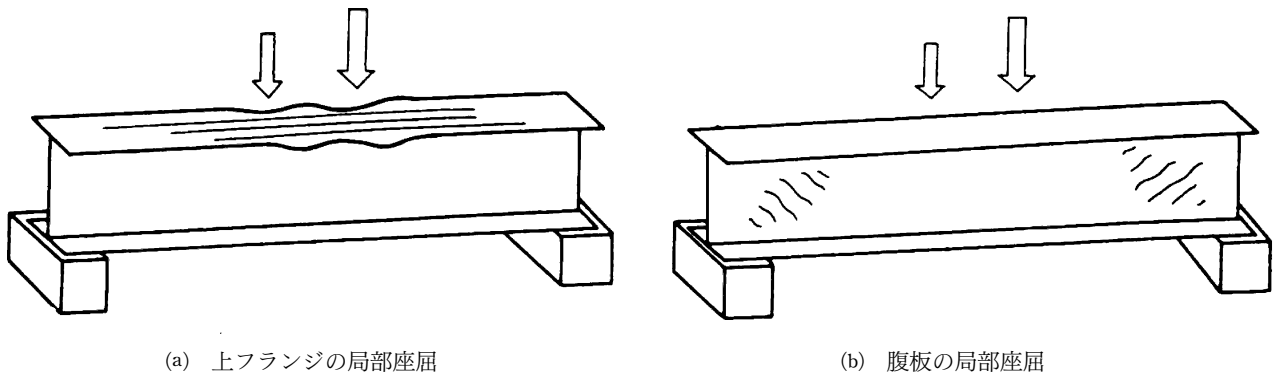


図-10 梁の局部座屈

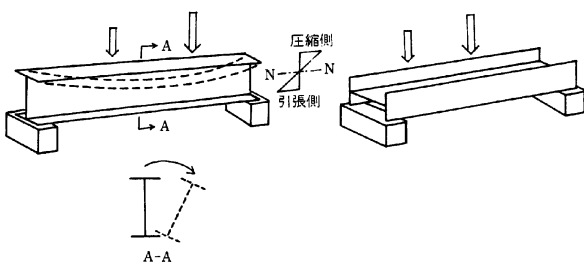


図-11 横倒れ座屈

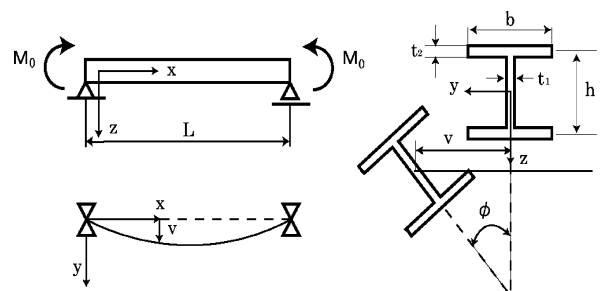


図-12 両端単純支持梁の横倒れ座屈

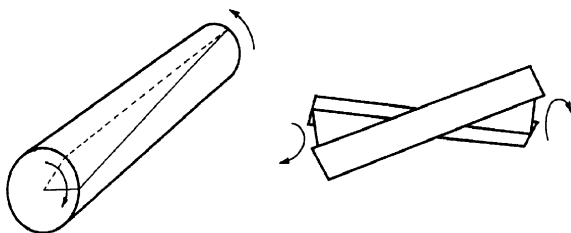


図-13 純ねじり

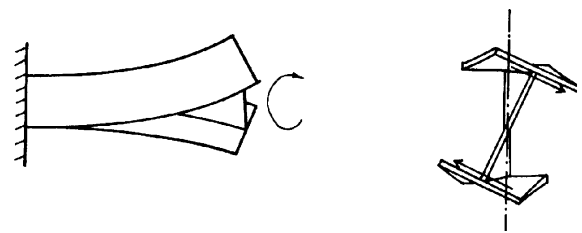


図-14 そりねじり

り）を拘束することによって生じるフランジの曲げ抵抗である。

梁が図-12に示すように両端に等モーメント M_0 を受けるとき、支配方程式は次式ようになる。

$$GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} - EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} + \frac{M_0^2}{EI_z} \phi = 0 \quad (9)$$

ここに、 ϕ は部材の回転角である。上式は、これまでみてきた柱や梁柱の支配方程式に比べて複雑であるが、これを解くと部材の両端に等モーメントが作用する場合の座屈モーメント M_{ocr} が求められる。

4.2 梁の設計⁶⁾

このようにして、梁の場合も梁柱と同様に、図-12に示すような等しい端モーメントが作用している場合の座屈モーメントの厳密解 M_{ocr} が存在する。そして、実際の構造物のように両端に不等端モーメント $M_1, M_2 (M_1 > M_2)$ が作用する場合は、やはり梁柱のときと同じように換算係数 C_m を用いて等価な等端モーメント M_0 を求める。

$$M_0 = C_m M_1 \quad (10)$$

このときの換算係数 C_m は、当然ながら梁柱の場合の式(5)とは異なり、図-15に示すようになる。理論値は図-15の斜線部の範囲内にあるが、これを近似するために2つの近似式が同図中に示されている。ここでも、梁柱と同様に Austin の直線式が理論値をよく近似できるが、ここでは梁柱の場合と違って C_m の下限値の制限 ($C_m > 0.4$) が必要であることがわかる。このように、梁と梁柱において同じような等価モーメント換算係数 C_m が用いられ、しかもそこでは同じ Austin 式が設計に用いられているが、両者はまったく異なる意

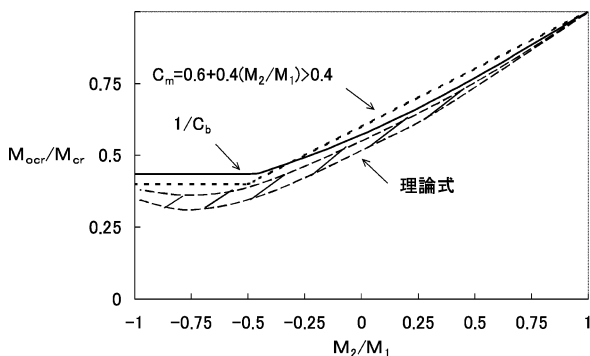


図-15 梁部材の等価換算曲げモーメント算出式の比較⁶⁾

味をもっていることに注意を要する。

5. 道路橋示方書の問題点¹²⁾

設計基準における許容曲げ圧縮応力度 σ_{ba} は、本来この等価な等曲げモーメント M_0 に対して定められている。したがって、不等端モーメントが作用する場合には、この許容曲げ圧縮応力度を次式により割り増しするのが、合理的である。

$$\sigma_{bc} = \frac{M_1}{I} y < \sigma_{ba}' = \sigma_{ba} \frac{M_1}{M_0} \quad (11)$$

設計では、上式で示すように、不等端モーメントの大きい方である M_1 による作用曲げ圧縮応力度 (左辺) が、許容値 σ_{ba}' (右辺) を超えないようにして行われてきた。しかし、道路橋示方書では昭和55年の改定から次式のようになった。

$$\sigma_{bc} = \frac{M_0}{I} y < \sigma_{ba} \quad (12)$$

すなわち、作用応力度 σ_{bc} の算定において、これまでの作用曲げモーメント M_1 の代わりに等価モーメント M_0 が用いられるようになった。式(11)と(12)の比較において、これらの式は梁の設計においては同等であるので問題が生じないが、これを梁柱の設計と組み合わせることで問題が生じてくる。

表-1に道路橋示方書における座屈安定照査式の変遷を示すが、これによると昭和48年までは梁の横倒れ座屈に対する許容応力度の割増しであったのが、昭和55年に梁柱の曲げモーメント(作用応力度)を低減すると同時に付加2次モーメントを考慮することによって変わっていることがわかる。すなわち、昭和55年以降、軸圧縮力が作用する場合、“梁柱”の式(6)と(7)を用いて“梁”の作用応力度 σ_{bc} (式(12))を増幅するようになった。式(7)の増幅係数が、表-1の昭和55年では応力度の形で用いられているのである。ここにおいて、梁柱の等価モーメント換算係数 C_m (式(5))と梁の等価モーメント換算係数(式(10)における C_m)が、同じ Austin 式を用いているための混同が行われるようになった。これらの等価モーメント換算係数は、本来別々に扱われるべきものである。これに関する詳しい論点については、文献¹²⁾を参考にされたい。

6. まとめ

棒部材は、構造力学的にみると作用力および座屈安定問題から、梁、柱そして梁柱の3種類に分

表－１ 座屈安定照査式に関する規定の変遷（道路橋示方書）

示方書	座屈安定照査式	梁	梁柱	
		M_{eq} による σ_{ba} の割増し	M_{eq} による σ_{bc} の低減	付加曲げモーメントの影響
昭和 39 年	$\frac{\sigma_c}{\sigma_{cay}} + \frac{\sigma_{bc}}{(\sigma_{ba})_{\max}} \leq 1$ $\sigma_c + \sigma_{bc} \leq \sigma_{ba}$	×	×	×
昭和 47 年	$\frac{\sigma_c}{\sigma_{ca}} + \frac{\sigma_{bc}}{\sigma_{ba}} \leq 1.0$	○	×	×
昭和 48 年	$\frac{\sigma_c}{\sigma_{ca}} + \frac{\sigma_{bc}}{\sigma_{ba}} \leq 1.0$	○	×	×
昭和 55 年	$\frac{\sigma_c}{\sigma_{caz}} + \frac{\sigma_{bcy}}{\sigma_{bagy} \left[1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_{eay}} \right]} + \frac{\sigma_{bcz}}{\sigma_{bao} \left[1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_{eaz}} \right]} \leq 1$	×	○	○

○：考慮 ×：考慮せず

けられる。ここでは、それらの違いを理論的および設計的な観点から論じた。多くの大学の学部ではこの内、柱の安定問題しか扱っておらず、梁や梁柱の安定問題は大学院のレベルになる。しかし、実務の設計基準では、もちろんこれらの要素を取り入れた規定が設けられており、実務者はその基礎的知識を要求される。技術者の構造安定問題に関する認識不足から、実際に事故が起こっているケースが見受けられる。現在において、構造技術者が実務を行っていく上で、大学学部の知識では不十分であることの最たる部分であろうと思われる。

構造技術に関する知識は、広範でしかもすべて密接に関連している。構造安定、線形と非線形解析、有限要素法、静的解析と動的解析、板構造と殻構造、骨組み構造、平面ひずみと平面応力、弾性設計と塑性設計、von-Mises と Tresca および Mohr-Coulomb と Druker-Prager の降伏条件、鋼材とコンクリートの構成則、等々様々な構造工学用語があるが、これらがどのようにリンクしているのかを実務を通じて理解するのは難しい。大抵の場合、実務で 10 年も経験すればその道のかなりのエキスパートになれるが、構造工学分野ではこれらの断片的な知識を得ることができても、総合的なリンクの理解が困難なためにいつまでたっても不十分な知識のままになることが多い。構造技術者として十分な知識を得るには、これらの構造工学用語に関する大学院での基礎的な学問の習得が不可欠であるというのが、私の経験である。

【参考文献】

- 1) 土木学会：座屈設計ガイドライン [2005 年改訂版]，平成 17 年 10 月。
- 2) 日本建築学会：鋼構造座屈設計指針，1996 年 1 月。
- 3) T.V. Galambos（翻訳：福本嘯士，西野文雄）：鋼構造部材と骨組み—強度と設計—，丸善，昭和 52 年 11 月。
- 4) 池田清宏，室田一雄：構造系の座屈と分岐，コロナ社，2001 年 11 月。
- 5) 熱田稔雄，当麻庄司：座屈のはなし—事故を防ぐために—，鹿島出版会，昭和 61 年 3 月。
- 6) Chen, W.F., and Lui, E.M.: Structural Stability, Elsevier, 1987.
- 7) 伊藤学：鋼構造学，コロナ社，2007 年 2 月。
- 8) 倉西茂：鋼構造，技報堂出版，2000 年 2 月。
- 9) 日本道路協会：道路橋示方書，Ⅱ鋼橋編，平成 14 年 3 月。
- 10) 日本建築学会：鋼構造設計基準—許容応力度設計法，2005 年 9 月。
- 11) American Institute of Steel Construction (AISC): Manual of Steel Construction, Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings, 2005.
- 12) 当麻庄司，倉真也：道路橋示方書における軸方向圧縮力と不等端曲げモーメントを受ける部材の座屈安定照査式に関する検討，構造工学論文集，Vol.47 A，2001 年 3 月。