

タイトル	位相制御非整数次積分による画像処理効果：フィルタ関数に関する予備的考察
著者	魚住，純；UOZUMI，Jun
引用	北海学園大学工学部研究報告(43)：27-38
発行日	2016-01-14

位相制御非整数次積分による画像処理効果 —フィルタ関数に関する予備的考察—

魚 住 純*

Effect of phase-controlled fractional integral on image processing —Preliminary study on the filter function—

Jun UOZUMI*

Abstract

Phase-controlled fractional integral is introduced as an extension of the fractional differintegral and is applied to a simple binary image. In this integral, the phase of the frequency filter function for integration is controlled by newly introduced parameters of a relative phase coefficient and a total phase coefficient which modify the phase of the filter function. The former controls how the phase increases with an increase in the order of the integral, while the latter determines the phase value independently of the integral order. In the case of fractional integrals, there is an uncertainty in the phase factor of the filter function at the origin, which is not the case with fractional derivatives. To see the effect of this uncertainty on integrated images, three different types of the phase value are examined, and it is shown that the simplest type of fixing the phase to zero provides the most satisfactory results.

1. はじめに

画像の微分演算は、エッジ検出や鮮鋭化などの基礎的な画像処理のための要素的手法として、様々な画像応用の場面において用いられる¹⁾。一方、積分演算は、被積分関数に大局的な影響を与えることから、画像処理に使われることは希である。これに対し、著者らは、積分の階数が非整数値を取り得る非整数次積分が対象画像に対して比較的穏やかな効果を与えることを示し、従来とは異なるトーンを与える平滑化などへの応用の可能性があることを示した^{2,3)}。

* 北海学園大学工学部電子情報工学科

* Department of Electronics and Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

この非整数次積分は、微分の次数を非整数次に拡張した非整数次微分と、Riemann-Liouvilleの積分により結ばれており、負の次数による微分が積分に相当するという意味で、一体の非整数次微積分 (fractional differintegral) として扱うことができる^{4,5)}。近年、非整数次微積分は、フラクタル理論におけるデータ処理を初めとして、その応用範囲が広がりつつある⁶⁾。

著者らは、これまで、非整数次微分の発展形として、微分フィルタ関数の位相を制御することにより、ピーク状の関数を微分する際に、導関数のピーク位置を移動させることを可能にする位相制御非整数次微分を導入し、分光スペクトルの微分演算におけるピーク位置の制御に有効であることを明らかにしてきた^{7,8)}。非整数次微積分の一体性から、位相制御非整数次微分は、積分にも拡張が可能である。そこで、本論文では、位相制御非整数次積分が画像に与える影響について、まず第1段階として、単純な2値の円盤画像に対する効果を考える。

非整数次積分には、非整数次微分と異なり、積分定数に相当する不定性があり、それが画像に及ぼす影響についても考える必要が生じる。本論文では、高速フーリエ変換 (FFT) を用いた積分処理におけるこの問題に重点を置いて考察する。なお、前論文と同様に、非整数次微分との用語の統一のため、積分の「階数」あるいは「回数」を「次数」に統一する^{2,3)}。

2. 位相制御非整数次積分

関数 $f(x)$ に対する ν 次の非整数次積分は、 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\xi)$ を用いて、

$$I_x^\nu f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) (i2\pi\xi)^{-\nu} \exp(i2\pi\xi x) d\xi \quad (1)$$

と表すことができる²⁾。ここで、 ξ は x の周波数に対応する変数であり I_x^ν は非整数次積分演算子である。式(1)において、被積分関数の中の $K(\xi, \nu) = (i2\pi\xi)^{-\nu}$ は、積分を与える周波数フィルタ関数である。このフィルタ関数をその絶対値 $|K(\xi, \nu)| = (2\pi|\xi|)^{-\nu}$ で置き換えることにより、非整数次絶対積分が定義できる。非整数次積分と非整数次絶対積分が画像処理に及ぼす効果については、前掲の文献において議論している^{2,3)}。

フィルタ関数 $K(\xi, \nu)$ の絶対値化は、その位相因子を除去することを意味する。これに対し、本論文では、位相因子を積極的に操作することにより得られる積分の効果を考える。このため、1次積分に相当するフィルタ関数 $k(\xi) = K(\xi, 1)$ をその絶対値 $\alpha(\xi)$ と位相 $\beta(\xi)$ を用いて、

$$k(\xi) = (i2\pi\xi)^{-1} = \alpha(\xi) e^{i\beta(\xi)} \quad (2)$$

と表し、さらに位相 $\beta(\xi)$ に定数 c を乗じて、新しいフィルタ関数

$$k_{p,c}(\xi) = \alpha(\xi) e^{ic\beta(\xi)} \quad (3)$$

を導入する．この c を相対位相係数と呼ぶことにする．これにより， ν 次の非整数次積分のフィルタ関数は，

$$K_{p,c}(\xi, \nu) = k_{p,c}^\nu(\xi) = \alpha^\nu(\xi) e^{i c \nu \beta(\xi)} \quad (4)$$

となる．式(4)のフィルタ関数による演算を位相制御非整数次積分 (phase-controlled fractional integral, PCFI) と呼ぶことにする．PCFIでは，相対位相係数 c の値を変えることにより，フィルタの周波数特性の絶対値を変えずに，位相のみに影響を与えることができる．非整数次微分においては，この位相の操作が，導関数のピーク位置を制御する効果があることが示されており^{7,8)}，積分においても，それに類似した効果が得られることが推測される．

非整数次積分では，関数 $k(\xi)$ が原点で発散するという問題が生じる．このため， $\alpha^\nu(\xi)$ に発散を抑える近似関数

$$\alpha^\nu(\xi) = (2\pi R)^{-\nu} \left[1 + \left(\frac{|\xi|}{R} \right)^2 \right]^{-\nu/2} \quad (5)$$

を導入する．一方，式(2)より，位相因子 $e^{i c \nu \beta(\xi)}$ は，

$$e^{i c \nu \beta(\xi)} = [i \operatorname{sign}(\xi)]^{-c\nu} \quad (6)$$

と表されるが，この関数は， $\xi \rightarrow +0$ と $\xi \rightarrow -0$ とで値が異なり，原点 $\xi = 0$ において値が不連続となることが問題となる．そこで，原点における位相因子の取り方として，3つの場合を考える．

I. $\xi \rightarrow \pm 0$ における値の平均値，すなわち，

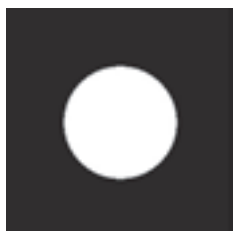
$$\frac{(i)^{-c\nu} + (-i)^{-c\nu}}{2} \quad (7)$$

を位相因子に用いる方法．これは，原点を挟む左右の位相因子の平均という意味で合理性があると思われるため，前掲の論文^{2,3)}で採用した値であるが，位相因子だけでなく $\alpha^\nu(\xi)$ の値にも影響を及ぼす点に注意する必要がある．

II. 位相因子として，式(7)の位相のみを取り出した

$$\exp\{i \arg[(i)^{-c\nu} + (-i)^{-c\nu}]\} \quad (8)$$

を用いる方法． $\alpha^\nu(\xi)$ に影響を及ぼすことはないが， $c\nu$ が整数の場合に位相が定まらないという問題が残る．



(a) 原画像

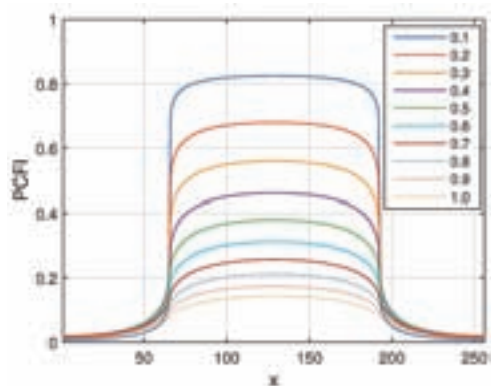
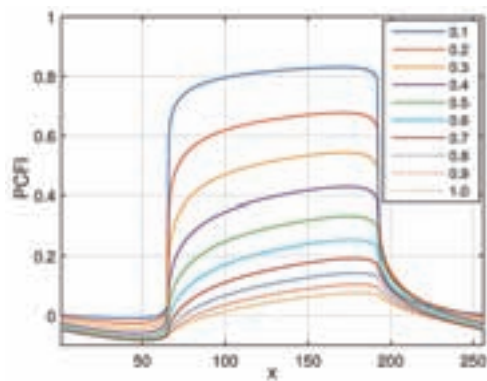
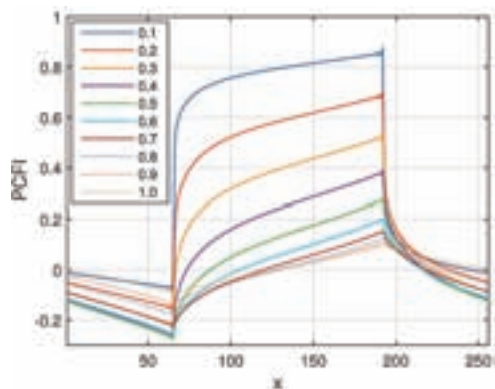
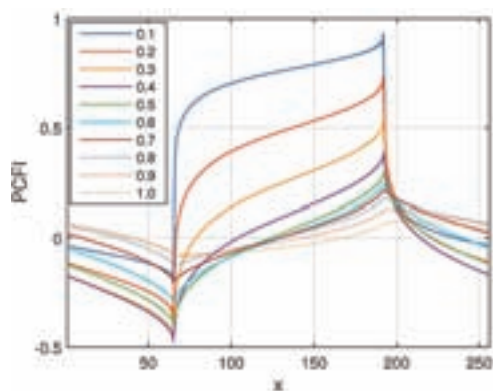
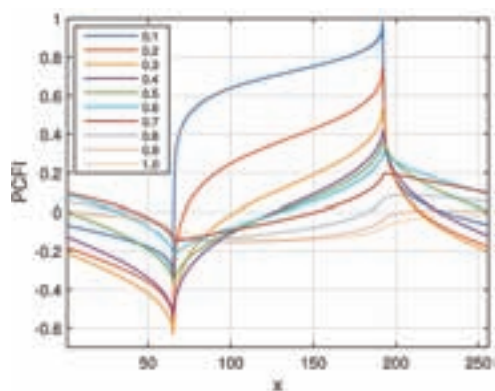
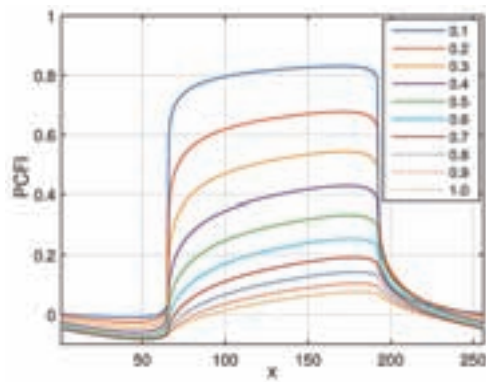
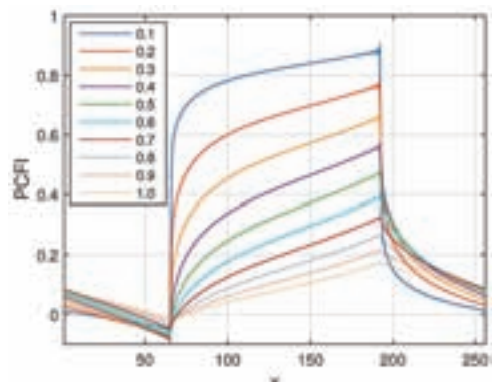
(b) $c=0.0$ (c) $c=0.5$ (d) $c=1.0$ (e) $c=1.5$ (f) $c=2.0$

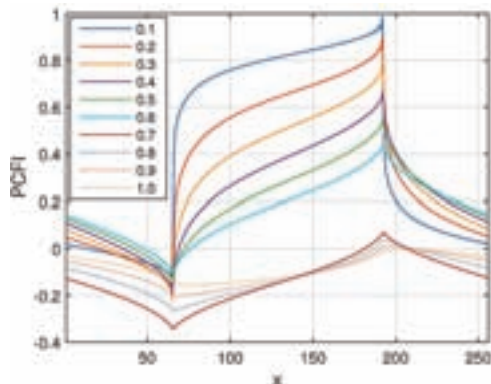
図1 相対位相係数による位相制御非整数次積分, タイプIの位相因子を使用



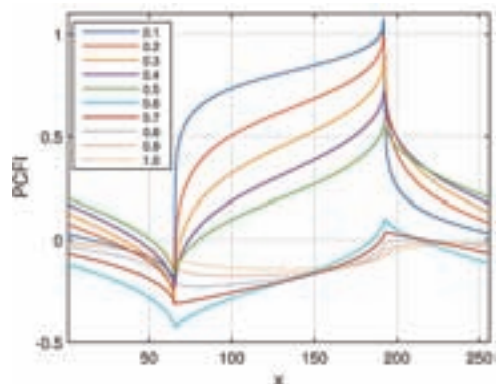
(a) $c=0.5$



(b) $c=1.0$

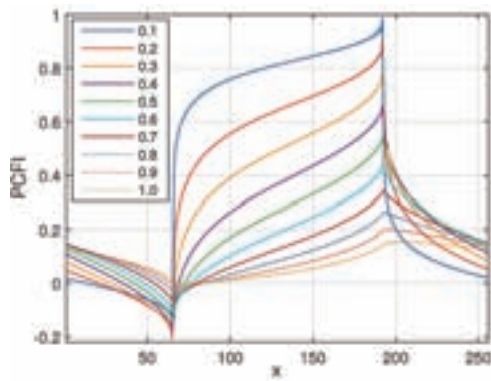


(c) $c=1.5$

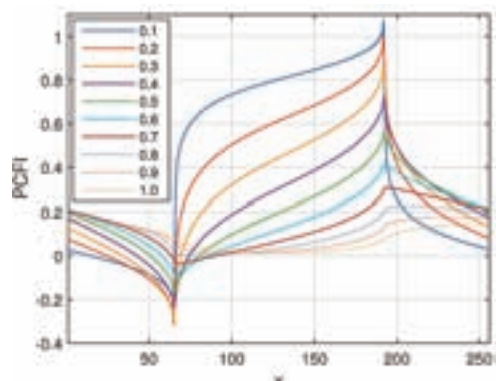


(d) $c=2.0$

図2 相対位相係数による位相制御非整数次積分，タイプⅡの位相因子を使用



(a) $c=1.5$



(b) $c=2.0$

図3 相対位相係数による位相制御非整数次積分，タイプⅢの位相因子を使用

Ⅲ. 原点の位相を $c\nu$ に依らず 0 とみなし、位相因子を 1 とする方法.

以上の 3 タイプの位相因子に対して得られる積分の結果を次節に示す. なお, 数値計算には, 科学技術用の計算機言語 MATLAB を用いた.

式(3)においては, PCFI を可能にするため, 相対位相係数 c を導入した. この係数は, 元の位相 $\nu\beta(\xi)$ に一定の倍率をかけて位相を制御するもので, 位相の値は積分次数に比例する. これに対し, 位相を制御するもう一つの方法として, 係数 $\gamma = c\nu$ を用いる方法が考えられる. この場合, 式(4), (6)は,

$$K_{p;\gamma}(\xi, \nu) = a^\nu(\xi) e^{i\gamma\beta(\xi)} \quad (9)$$

$$e^{i\gamma\beta(\xi)} = [i \operatorname{sign}(\xi)]^{-\gamma} \quad (10)$$

に置き換えられる. この係数 γ を全位相係数と呼ぶことにする. 全位相係数を使うと, 積分次数とは独立して位相を直接制御することができる.

3. 相対位相係数による PCFI

図 1 (a) に示す 2 値の円盤画像に対して, 相対位相係数に $c =$ (a) 0.0, (b) 0.5, (c) 1.5, (d) 2.0 の各値を用い, 次数 $\nu = 0.1$ 次から 1.0 次まで 0.1 次毎に積分した結果を図 1 (b) – (f) に示す. ただし, 図 1 (b) – (f) は, 積分画像の中央の水平軸 (x 軸) 上の値を示したものである. また, この図では, タイプ I の位相因子を用いた. 図 1 (b) に示す $c = 0.0$ の場合は非整数次絶対積分に相当しており, 図 1 (d) の $c = 1.0$ は通常非整数次積分を意味している. 非整数次絶対積分では, 積分の次数が増加するに従い, 原画像の中心部の矩形の強度が次第に左右対称に平滑化されるのに対し, 通常非整数次積分では, 円盤の右端に鋭いエッジが生じるとともに, x 軸の正方向にテールを引くように平滑化が進む. 通常の 1 次積分に相当する $c = 1.0$, $\nu = 1.0$ においては, 定数の 1 次積分としての直線的な増加関数が現れている. フィルタの位相を通常非整数次積分の半分に抑える $c = 0.5$ では, 両者の中間的な状態に平滑化されている. これに対し, $c = 1.5, 2.0$ と大きくなるにつれ, 円盤右端のエッジや正方向へのテールの形成がより強くなっている. このことは, 非整数次微分の場合と同様, フィルタ関数の位相を操作することにより, 得られる積分の関数形に, 空間的なシフトに相当する効果が生じることを示している.

図 1 において, c が 1.0 の場合, およびそれを超えると, 積分次数の増加による関数形の変化に, 一定の傾向から逸脱するような不自然さが見られるようになる. これは, タイプ I の位相因子を用いたことによる影響であると考えられる. 式(7)は, $c\nu$ の増加に伴い, 絶対値が変動するからである. そこで, 式(7)における絶対値の変化を除去したタイプ II の位相因子を用

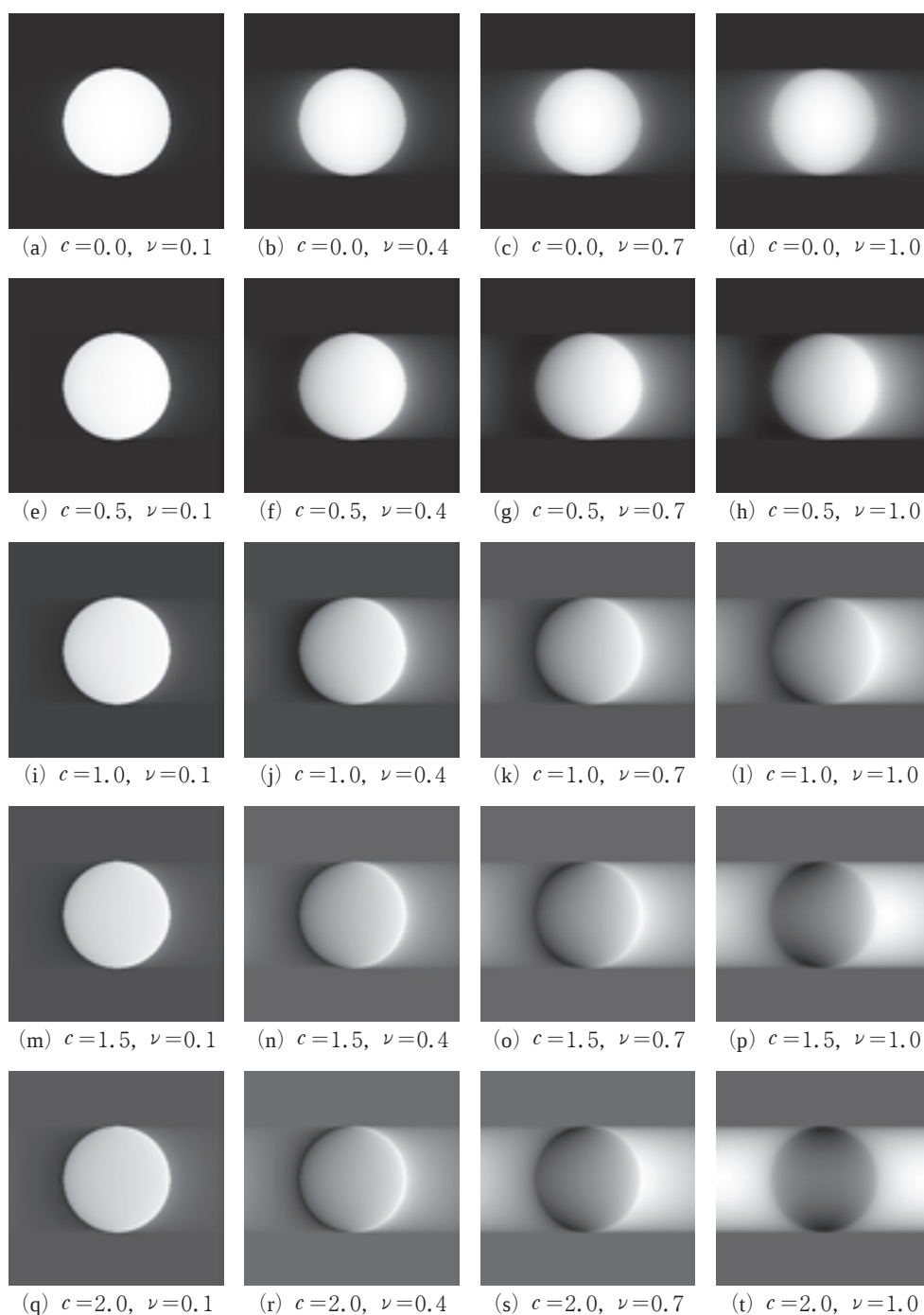


図4 相対位相係数によるPCFIの画像．濃度表示は自動スケーリング

いて計算した結果が図2である。ただし、 $c=0.0$ の場合には図1 (b)と同じ結果となるため、省略してある。この図では、 $c=1.0$ の結果が図1の場合より改善されているのに対し、 $c=1.5, 2.0$ においては、積分の結果が負の大きな値になっており、正值関数の積分の結果としてはかなり不自然である。その原因は、 $c\omega$ が1を超えると式(8)の値が負になることにある。フィルタ関数の原点における値は、直流分すなわち定数項の透過率である。このため、第3の選択肢として、直流分を負値にしないタイプⅢの位相因子を用いて計算した結果が図3である。ここでは、 $c=0.0, 0.5$ および 1.0 の場合が図2のタイプⅡの場合に一致している。図3では、 $c\omega$ が増加しても、積分の結果は自然に推移しており、検討した3つの位相因子のなかでは、最も良い結果を与えていると言える。

非整数次積分のフィルタ関数の原点における値の設定には、任意性があると考えられる。上に述べたように、原点のフィルタ関数は、積分結果の直流分、すなわち定数項を与えるもので

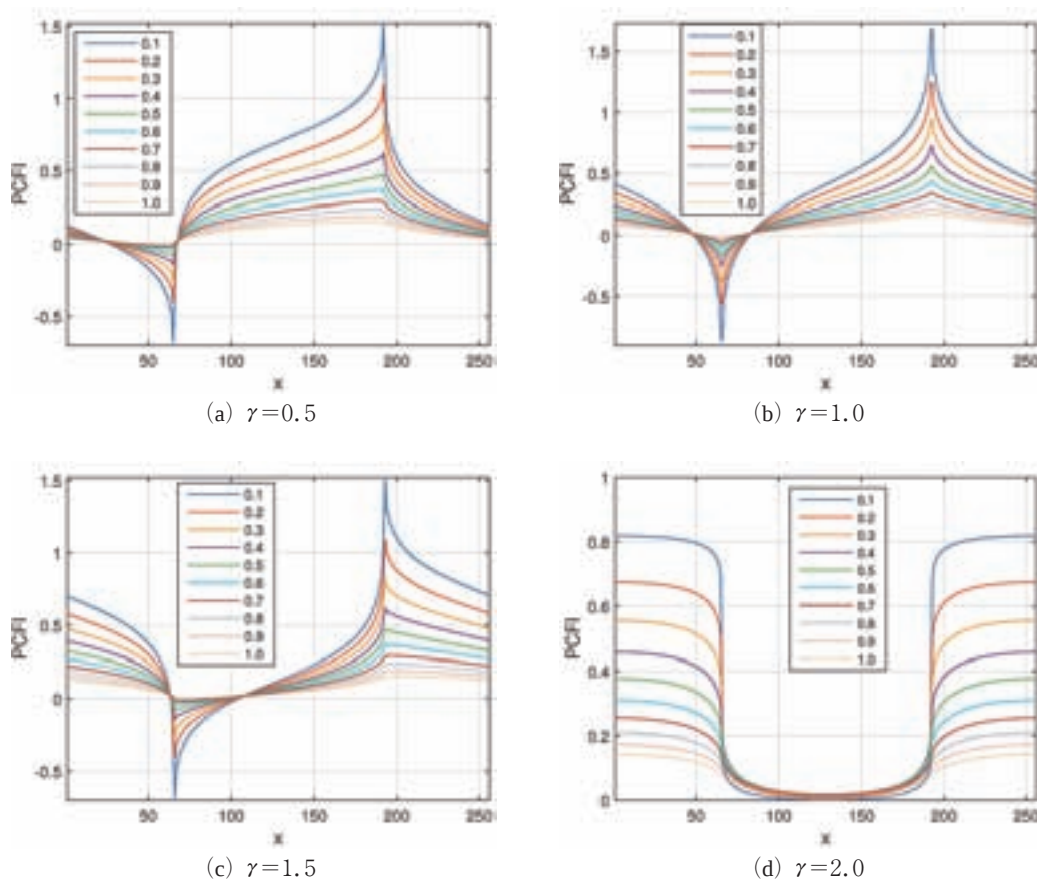


図5 全位相係数による位相制御非整数次積分。タイプⅢの位相因子を使用

あり、これは積分定数に相当すると考えられる。実際、非整数次微分のフィルタ関数は、任意の微分次数において原点での値が零であるから、非整数次積分の結果に非整数次微分を作用させて元の関数に戻す際には、定数項は完全に除去される。したがって、非整数次積分における積分定数の値は、その応用の目的に応じて任意に定めることができると考えられる。その意味では、積分値を完全に非負にするように積分定数を設定することも考えられる。しかし、ここまでの議論は、ある1軸上での積分に限られており、画像全体として適切な結果を与える積分定数をどのように設定するかは、より一般的な画像への適用も考慮に入れた考察が必要である。

最も良い結果を与えているタイプⅢの位相因子を用いてPCFI処理を行った画像を図4に示す。 $c=0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の5つの相対位相係数に対して、次数 $\nu=0.1, 0.4, 0.7, 1.0$ の4とおりの積分結果を表示している。積分画像には濃度が負値のものもあるため、負値を含めた最低濃度を階調0（黒）、最高濃度を255（白）とする自動スケーリング機能を用いて表示している。原画像は、白色円盤の背景は濃度値が0であり、積分は水平方向の x 軸について行っているため、円盤の上下の帯状の領域は、積分後も濃度値は0である。したがって、負値を持つ画像では、この上下の零濃度値の領域が中間階調に表示されており、負濃度の領域はその階調よりも黒く表示されている。

図4から、 $c=1.0$ の非整数次積分では、積分次数が増加するに従って、 x の正方向に白い平滑化のテールが伸び、逆に x の負の方向には負値の領域が出現することが観測される。そして、相対位相係数 c は、その値を大きくするにつれて、次数の増加に対するこの振る舞いをより加速する作用があることが分かる。

なお、以上の計算結果の図では、 x 軸方向の左右端で関数が連続していることに注意したい。これは、式(1)が示すように、非整数次積分の計算はフーリエ変換に基づいており、FFTを利用してフーリエ変換を行うと、処理前後の関数がともに周期関数となることに起因している。FFTにおけるこの周期性が、式(1)が示す本来の連続積分による積分の定義とはある程度異なる結果を与えていることにも留意する必要があるが、この特性は、FFTを用いた画像処理には常に伴う特性でもある。

4. 全位相係数によるPCFI

全位相係数を用いたPCFIは、 $\gamma=(a) 0.5, (b) 1.0, (c) 1.5, (d) 2.0$ の4つの値を用い、これまでと同様に0.1次から1.0次までの次数について積分を行った。その結果を図5に示す。この図から分かるように、全位相係数を用いた位相制御非整数次積分には、図1(d)の通常の非整数次積分に見られる、積分次数の増加に伴って積分変数の方向に伸びるテールが長くなる現象は見られない。この方法では、エッジやピークの位置等の関数の概形や局在性を係数の値

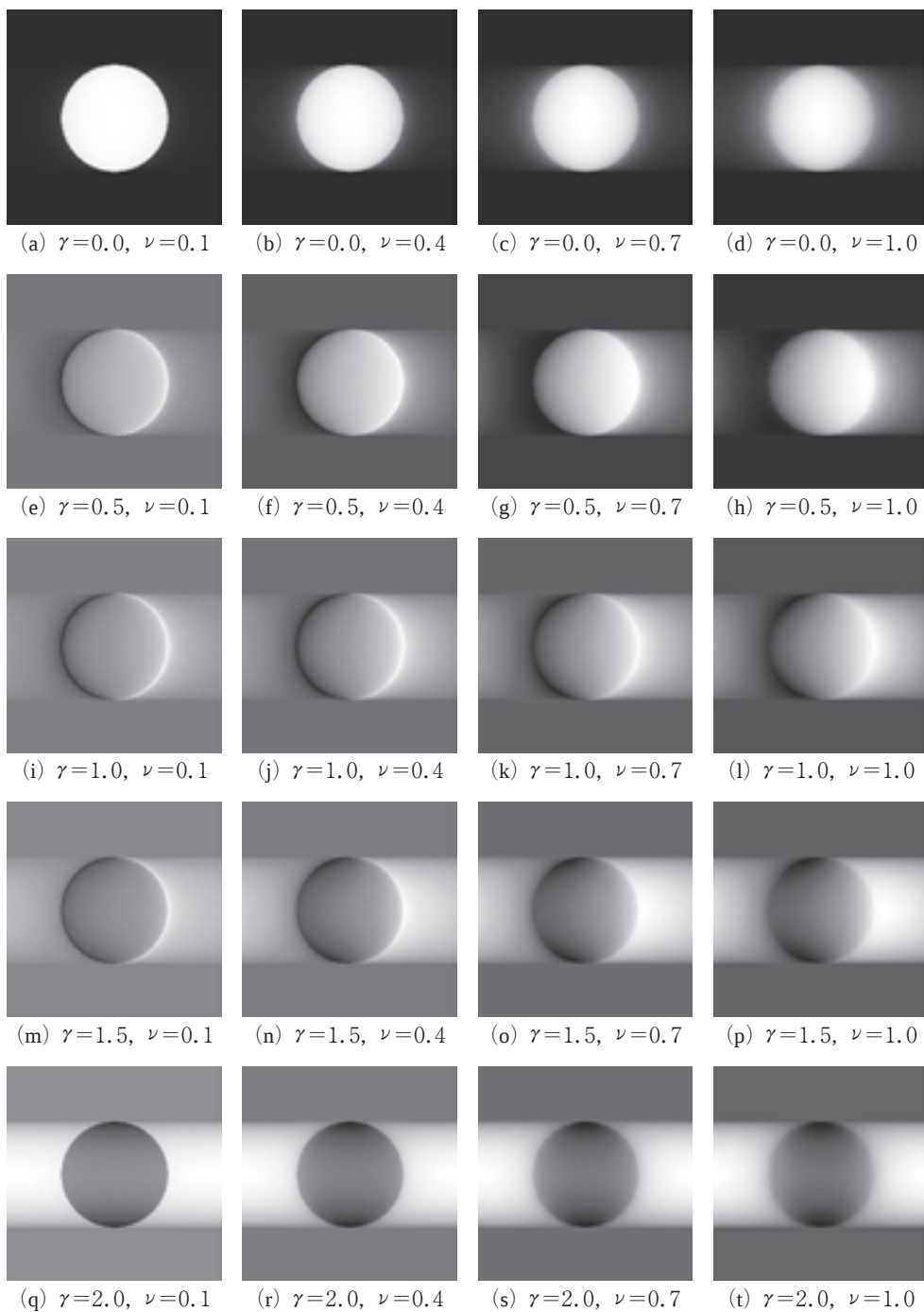


図 6 全位相係数によるPCFIの画像。濃度表示は自動スケーリング

に応じて保持したまま、積分次数が増加するに従って、より強い平滑化が生じていることが確認できる。すなわち、 $\gamma=1.0$ であれば、通常非整数次積分に近い形状を保持し、それよりも小さい γ では、より局所的な平滑化となり、大きい γ を指定すれば、より長くテールを引く平滑化が、次数 ν とは独立に生じている。

その振る舞いを、PCFI処理した円盤画像の自動濃度スケール表示で示したのが図6である。上に述べた全位相係数によるPCFIの特性が明確に現れている。

5. おわりに

非整数次積分を与えるフーリエ空間の周波数フィルタ関数に対して、絶対値を変えずに位相のみを変化させることにより、積分による関数の変化やその変化が生じる空間的位置を制御することが可能であることを示した。フィルタ関数の位相により特性を制御できることから、これを位相制御非整数次積分と呼ぶこととした。位相制御の仕方として、積分次数に依存する位相の値に倍率を与える相対位相係数を用いる方法と、積分次数に依存しない形式で位相を直接指定する全位相係数を用いる方法を提案した。2値の円盤画像にこの積分を適用したところ、相対位相係数を用いる方法では、積分次数の増加による関数の変化に対して、相対位相係数の増加は、その空間的位置を積分変数の正の方向に引き伸ばす特性があることが示された。一方、全位相係数を用いる方法では、積分次数が増加しても、関数の変化が生じる空間的位置は、その位相係数に応じた領域に保持されることが示された。

非整数次積分を与える周波数フィルタは、原点における位相の値に不定性があることから、その値の与え方として3つの方法を検討した。その結果、積分次数や位相係数に無関係に位相を0とする場合が、積分次数の変化に対して最も自然と思われる関数の変化を与えることが示された。

本研究は、単純な2値円画像を用いて位相制御非整数次積分の基本的特性を考察したものであり、一般的な画像に対する積分の効果や、原点位相の与え方の影響等については、今後さらに検討が必要である。

参考文献

- 1) 高木幹雄・下田陽久：新編 画像解析ハンドブック，東京大学出版会，2004.
- 2) 魚住 純・鈴木宏司：FFTによる2次元画像の非整数次積分処理 (I) —1次元積分—，工学研究（北海学園大学大学院工学研究科紀要），No. 11，pp.65-75，2011.
- 3) 魚住 純・鈴木宏司：FFTによる2次元画像の非整数次積分処理 (II) —2次元積分—，工学研究（北海学園大学大学院工学研究科紀要），No. 11，pp.77-86，2011.
- 4) I. Bodlubny：Fractional Differential Equations, Academic, 1999.
- 5) 森口繁一・他：数学公式I，岩波書店，1956，p.52.

- 6) 高安秀樹：フラクタル，朝倉書店，1986，p.149.
- 7) J. Uozumi : Phase-controlled fractional derivatives of NIR spectra, Proc.16th International Conference on Near Infrared Spectroscopy (NIR2013), eds. V. B. Maurel, et al., pp.790–796, 2013.
- 8) J. Uozumi and N. Ohata : Phase-controlled fractional derivatives applied in NIRS for estimating constituents in wheat flour, Proc. 4th Asian Near Infrared Symposium (ANS2014), eds. R. K. Cho, et al., pp.58–61, 2014.