

タイトル	評価基準内部従属構造を持つ階層分析法のファジィウエイト表現
著者	大西，真一；山ノ井，高洋；OHNISHI，Shin-ichi；YAMANOI，Takahiro
引用	工学研究：北海学園大学大学院工学研究科紀要(15)：37-41
発行日	2015-10-30

評価基準内部従属構造を持つ 階層分析法のファジィウェイト表現

大 西 真 一* ・ 山ノ井 高 洋*

Fuzzy Weight Representation for Criteria Inner Dependence AHP

Shin-ichi OHNISHI* and Takahiro YAMANOI*

要旨

内部従属法は評価基準に独立性が仮定できない場合に用いられる階層分析法(AHP)の一拡張手法である。ただし、実際の応用では一対比較行列が十分な整合性を持たないために、データに信頼性が損なわれている場合が見受けられる。このような場合、ウェイト(重要度)の拡張表現が有用である。本研究では以前に提案した感度分析結果を用いた局所的なウェイト表現について考察し、データに十分な整合性が無いだけでなく、評価基準に従属性がある場合に使える代替案のファジィ総合ウェイト表現を提案している、

1. はじめに

階層分析法 (Analytic Hierarchy process, AHP) は 1977 年に T.L. Saaty により提案され^[1,2], 今日では意思決定の分野で幅広く使われている手法である。データとなる一対比較行列から評価基準や代替案の局所的ウェイトを算出した後に、最終的に代替案の総合ウェイトにより選好を明らかにする。通常の AHP では評価基準に独立性を仮定し、さらに意思決定者に正確な一対比較を要求するが、実際にこの二つの条件を満たすことは難しく、データおよび結果の信頼性の悪さがしばしば指摘される。この問題は現実的な応用例で、階層構造の要素の抽出の難しさとデータ行列が十分な整合性を持たないという現象によく現れる。

評価基準の独立性の仮定ができない場合は、非加法的測度をウェイトに用いる方法や、内部従属法と呼ばれる、影響・従属行列を用いる手法などが使われる。筆者らは以前ファジィ測度による方法も研究していたが、現在は内部従属法を採用している。

また、データの整合性が悪い場合の対処として、ファジィ数を一対比較行列の成分として使う様々

な手法^[14,15]も活発に提案されているが、本研究ではウェイトも同様のあいまいさを含むものと仮定する。それを表現するために感度分析結果を用いたファジィ集合によるウェイト表現^[9,12]を用いる。これにより、どのようなあいまいさが総合的な代替案のウェイトに含まれているかを読み取る手がかりが与えられると考えられるからである。

2. AHP

AHP はそれまでモデル化したり定量化したりすることが難しかったことをも扱えるようにしている点が特徴で、特に人間を含むシステムで有用と言われている。

2.1. 手順

AHP の手順は以下の通りである。

(手順 1) 階層図の作成

複雑な状況下にある問題を階層構造に分解して階層図を作る。

* 北海学園大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Hokkai-Gakuen University

(手順 2) 各階層での要素間の一対比較

意思決定者に各階層の各要素が他と比べてどの程度重要と考えているかを答えてもらい、一対比較行列 A を作る。その要素 a_{ij} は、要素 i が j と比べてどの程度重要であるかによって $1/9$ から 9 の値をとり、 $a_{ji}=1/a_{ij}$, $a_{ii}=1$, $i, j=1, \dots, n$ とする。ここで n は階層内の要素の数である。

(手順 3) 各階層でのウェイトの計算

本研究でのウェイトは一対比較行列のプロベニウス根 (正の最大固有値) に対応する規準化された固有ベクトル

$$w=(w_i), \sum_i^n w_i=1 \quad (1)$$

を用いる。

(手順 4) ウェイトの合成による代替案の評価

各階層の評価項目間のウェイトを合成することにより、階層全体の重み付けを行う。いま、評価基準の要素 $i(i=1, \dots, n)$ のウェイトを w_i , 評価基準 i に関する代替案 $k(k=1, \dots, m)$ の局所的ウェイトを u_{ik} とすると、代替案の総合ウェイト v_k は

$$v_k=\sum_i^n w_i u_{ik} \quad (k=1, \dots, m) \quad (2)$$

の式で求めることができる。これにより最終的な各代替案の総合目的に対する優先順位が決定する。

2.2. 整合度

一対比較により得られた数値はあくまでも二つの項目の価値の比較であるから、全体として首尾一貫した整合性をもっているかどうかはわからない。そこで全体の整合性を計る整合度 C.I. が次のように定義されている。

$$C.I.=\frac{\lambda_A-n}{n-1} \quad (3)$$

ここで n は一対比較行列 A のサイズ, λ_A は行列 A のフロベニウス根である。常に C.I. は非負であり, C.I. の値が小さいほど整合性があり, A が完全に整合していると C.I.=0 となる。一般には C.I.<0.1 であれば整合性があるとみなせる。

意思決定者は評価要素が n 個ある階層では $n(n-1)/2$ 回の一対比較をすることになるので, n の増加に伴って急速に整合性が失われる場合が多い。

2.3. 内部従属法

通常の AHP においては評価基準の独立性を仮定する必要がある。しかし実際の応用においてはそのような評価基準をいつも選定することが難しい状況が存在する。内部従属法^[3] はこのような状況で用いる一つの AHP の拡張的手法である。

内部従属法では従属行列 $F=\{f_{ij}\}$, を用いて, 真のウェイト $w^{(N)}$ を次の式で計算する。

$$w^{(N)}=Fw \quad (4)$$

ここで w は評価基準に独立性を仮定した時のウェイトベクトル, つまり通常 AHP のウェイトで, また従属行列 F は各評価基準に対する影響行列の固有ベクトルから計算される。

3. 感度分析

意思決定者の回答パターンがデータ構造にどのように影響を与えているかを調べる方法に感度分析がある。AHP においては, 一対比較行列の各成分が整合度やウェイトに対してどのように影響を与えているのかを調べる必要が生じる。これにより結果の解釈に手がかりが与えられたり, データの構造を知ることが可能となる。

本研究ではデータの構造を変えずに, 比較的簡単に使用できる AHP の感度分析^[9] を利用する。その内容は一対比較行列に摂動を与えたときの整合度やウェイトの変動に, 最も影響を与えている行列の要素を探索する手法である。

一対比較行列 A は正の正方向行列なのでペロン・フロベニウスの定理が成り立ち, それにより摂動を与えた一対比較行列について次の定理が成り立つ。

定理 1

$A=(a_{ij})$, $(i, j=1, \dots, n)$ を正の正方向行列とし, それに摂動を与えた行列を $A(\epsilon)=A+\epsilon D_A$, $D_A=(a_{ij}d_{ij})$ とする。また, λ_A を A のフロベニウス根, w_1 をそれに対応する固有ベクトル, w_2 を A' のフロベニウス根($=\lambda_A$)に対応する固有ベクトルとすると, 摂動を与えた後の一対比較行列 $A(\epsilon)$ のフロベニウス根 $\lambda(\epsilon)$, およびそれに対応する固有ベクトル $w_1(\epsilon)$ は

$$\lambda(\epsilon)=\lambda_A+\epsilon\lambda^{(1)}+o(\epsilon), \quad (5)$$

$$\mathbf{w}_1(\varepsilon) = \mathbf{w}_1 + \varepsilon \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{o}(\varepsilon). \quad (6)$$

と表すことができる。ただし、ここで

$$\lambda^{(1)} = \frac{w'_2 D_A \mathbf{w}_1}{w'_2 \mathbf{w}_1} \quad (7)$$

であり、 $\mathbf{w}^{(1)}$ は

$$(A - \lambda_A I) \mathbf{w}^{(1)} = -(D_A - \lambda^{(1)} I) \mathbf{w}_1 \quad (8)$$

を満たす n 次元ベクトル、 $\mathbf{o}(\varepsilon)$ は全ての要素が $\mathbf{o}(\varepsilon)$ である n 次元ベクトルを表すものとする。

3.1. 整合度の感度分析

定理 1 から、摂動を与えた一対比較行列の整合度について次の系が得られる^[12]。

系 1.

摂動を与えた後の整合度の変動部分 $\text{C.I.}^{(1)}$ は適当な係数 g_{ij} を用いて次のように表現できる。

$$\text{C.I.}^{(1)} = \sum_i \sum_j^n g_{ij} d_{ij}. \quad (9)$$

この系の証明、および係数の計算方法は^[9]を参照されたい。

系 1 より変動部分 $\text{C.I.}^{(1)}$ は d_{ij} の一次結合で表されていることが分かり、係数 g_{ij} から整合度に対する一対比較行列の成分の影響の大きさを評価することができる。

なお、一対比較行列においては対称成分の逆数関係が成り立つため、 $d_{ji} = -d_{ij}$ が導かれる。この性質を使うと整合度の変動部分は $d_{ij} (i < j)$ の一次結合で表現することができる。こちらの場合の方が影響の大きさは評価しやすいが、ここでは後でファジィウェイトで用いるために逆数関係を利用していない。

3.2. ウェイトの感度分析

同様に定理 1 から摂動を与えた一対比較行列のウェイトについて次の系が得られる^[12]。

系 2.

摂動を与えた後のウェイトの変動 $\mathbf{w}^{(1)} = (w_k^{(1)})$ は適当な係数 h_{kij} を用いて次のように表現できる。

$$w_k^{(1)} = \sum_i \sum_j^n h_{kij} d_{ij}. \quad (10)$$

系 2 の d_{ij} の係数 h_{kij} から、ウェイト $w_k^{(1)}$ に対する一対比較行列の成分の影響の大きさを評価することができる。

4. ファジィ集合による代替案の総合ウェイト表現

実際の AHP の応用においてはデータに信頼性が不足している場合が多く見受けられる。原因は評価項目の多さや意思決定者が持つあいまいさなどであり、一対比較行列の整合度が多少悪く ($0.1 < \text{C.I.} < 0.2$) なるという結果に現れる。

そのようなときは一対比較行列の各成分（意思決定者の判断）があいまいさを含んでいると考えられるので、ウェイトもまたクリスプな値でなく、あいまいさを含んだ形で表現することが望ましい。そこで、ここではまず感度分析結果を用いたファジィ集合によって通常 AHP の評価基準のウェイトを表現し、それを用いた場合の内部従属法の評価基準、および代替案の総合ウェイトを提案する。

4.1. ファジィ数

ここでファジィ表現に使う集合としては L-R ファジィ数を用いる。ファジィ数とは数値軸上のファジィ集合であり、L-R ファジィ数

$$M = (m, \alpha, \beta)_{LR} \quad (11)$$

はメンバーシップ関数が次の式によって与えられるファジィ数である。

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & (x \leq m) \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & (x > m) \end{cases} \quad (12)$$

ここで L, R は

$$(i) \quad L(x) = L(-x),$$

$$(ii) \quad L(0) = 1,$$

$$(iii) \quad L(x) \text{ は非増加関数}$$

の性質を満たす型関数であり、 m が中心、 α, β がそれぞれ左右の広がりを表している。

4.2. 通常 AHP における局所的ファジィウェイト

系 1 と系 2 の式 (9), (10) に現れた係数の積 g_{ij}

h_{kij} は、一対比較行列の成分 a_{ij} が項目 k に与える影響と見ることができる。この積が正なら項目 k の真のウェイトは、クリスプなウェイト w_{1k} よりも大きいと考えられ、負であれば小さいと考えられる。よって係数の $g_{ij}h_{kij}$ の符号はファジィ数の広がりの方角を示していると見ることができる。また、積の絶対値 $|g_{ij}h_{kij}|$ は影響の大きさとみなせる。ここで係数 g_{ij} は常に正であるので、実際は係数 h_{kij} の符号のみに注意すればよい。

さらに、整合度 C.I. が大きくなればあいまい性が増していることを考慮すると、積 $C.I. g_{ij} |h_{kij}|$ が項目 k のウェイトを表すファジィ数の（一対比較行列の成分 a_{ij} に関しての）広がりの方角と見られる。よってあいまいさを含んだ次のウェイトが定義される。

定義 1.（通常 AHP における局所的 ファジィ ウェイト）

w_k を要素 k のクリスプなウェイトとし、 g_{ij} 、 h_{kij} をそれぞれ系 1、系 2 で計算された係数とする。一対比較行列の整合度が良くない場合の項目 k のウェイトは、次の L-R ファジィ数で表現される。

$$\tilde{w}_k = (w_k, \alpha_k, \beta_k)_{LR} \quad (13)$$

ここで

$$\alpha_k = C.I. \sum_i^n \sum_j^n s(-, h_{kij}) g_{ij} |h_{kij}|, \quad (14)$$

$$\beta_k = C.I. \sum_i^n \sum_j^n s(+, h_{kij}) g_{ij} |h_{kij}|, \quad (15)$$

$$s(+, h) = \begin{cases} 1, & (h \geq 0) \\ 0, & (h < 0) \end{cases}, \quad (16)$$

$$s(-, h) = \begin{cases} 1, & (h < 0) \\ 0, & (h \geq 0) \end{cases} \quad (17)$$

であり、この定義を用いることにより、各要素（評価基準、代替案）の局所的ファジィウェイトを算出することができる。

4.3. 内部従属法における局所的小および総合ファジィウェイト

内部従属法の場合の局所的ファジィウェイト表現としてはファジィ数の積演算と (4) 式から $w_k^{(N)}$ 、 $\alpha_k^{(N)}$ 、 $\beta_k^{(N)}$ が算出される次の表現がより適切であると考えられる。

$$\tilde{w}_k^{(N)} = (w_k^{(N)}, \alpha_k, \beta_k)_{LR} \quad (18)$$

この表現を用いることにより、各評価基準と局所的代替案のファジィウェイトがそれぞれ計算され、拡張原理に基づくファジィ数の演算により、最終的な代替案ファジィウェイト表現が可能となる。

具体的には、まずファジィウェイトの定義から計算される w_i 、 α_i 、 β_i と評価基準間の従属行列 F_c を用いて、各評価基準のファジィウェイトが次のように表現される。

$$\tilde{w}_i^{(N)} = (w_i^{(N)}, \alpha_i, \beta_i)_{LR} \quad (19)$$

ここで

$$w^{(N)} = (w_i^{(N)}) = F_c w. \quad (20)$$

続いて、 i 番目の評価基準にのみ関係する代替案のファジィウェイト $\tilde{u}_i = (\tilde{u}_{ik})$ を使って、 k 番目の代替案の最終的な総合ファジィ修正ウェイト $\tilde{v}_k^{(N)}$ は次の式で求められることになる。

$$\tilde{v}_k^{(N)} = \sum_i^m \tilde{w}_i^{(N)} \otimes \tilde{u}_{ik} \quad (21)$$

ここでの積 $\otimes$ はファジィ数同士の積演算で、通常、ファジィ数同士の演算では、回数を重ねるごとにあいまいさの広がりが大きくなっていくので、結果が分かりにくいものになる場合が多い。しかしここで計算された評価基準のファジィウェイトは和が 1 に規準化されているので、これをファジィ数の制約条件（相互作用）と見ることで、あいまいさの広がりを緩和することも可能となる^[4]。

5. おわりに

通常 AHP、および内部従属 AHP ではデータ行列が十分な整合性を持たないことが多いため、データ自体の信頼性の悪さがしばしば指摘される。本研究ではウェイトがあいまいさを含むものと仮定し、感度分析結果を用いたファジィ集合により、内部従属のある評価基準のウェイト表現を提案した。またファジィ数の演算を用いることにより、代替案総合ウェイトもファジィ表現することが可能になり、結果にどのようなあいまいさが含まれているかを効果的に評価することができたと考えられる。

今後は代替案に独立性が仮定できない場合、お

よび評価基準間と代替案間に共に独立性が仮定できない場合の二重内部従属についても、ウエイト表現の研究を進める予定である。

【参考文献】

- [1] T. L. Saaty: A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology*, vol.15, no.3, pp.234-281, 1977.
- [2] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [3] T. L. Saaty: Inner and Outer Dependence in AHP. University of Pittsburgh, 1991.
- [4] D. Dubois and, H. Prade: Additions of Interactive Fuzzy Numbers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, no.4, Aug. 1981.
- [5] T. L. Saaty: Scaling the membership function, *European Journal of Operational Research*, vol.25, pp. 320-329, 1986.
- [6] 刀根薫：ゲーム感覚意思決定法，日科技連，1986.
- [7] D. Dubois and, H. Prade: Fuzzy numbers, *Analysis of Fuzzy Information*, vol.1, pp.214-263, 1987.
- [8] D. Dubois and H. Prade: *Possibility Theory An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum Press, New York, 1988.
- [9] 大西真一，今井英幸，河口至商：ファジィAHPにおける感度分析を用いた重要度の安定性の評価，日本ファジィ学会誌，vol.9，no.1，pp.140-147，1997.
- [10] 木下栄蔵：孫子の兵法の数学モデル，講談社，1998.
- [11] 木下栄蔵（編著）：AHPの理論と実際，日科技連，2000.
- [12] 大西真一，今井英幸，山ノ井高洋：AHPの感度分析結果を用いたファジィウエイトについて，北海学園大学工学部研究報告，no.29，pp.239-248，2004.
- [13] 大西真一，山ノ井高洋，今井英幸：AHPの感度分析結果を用いた代替案ウエイトについて，北海学園大学工学部研究報告，no.32，pp.167-174，2005.
- [14] 大西真一，Didier Dubois，Henri Prade，山ノ井高洋：ファジィ逆数行列を用いたAHPの整合度とウエイトについて，第20回ファジィシステムシンポジウム講演論文概要集，no.4F4-3，p 70，2004.
- [15] S. Ohnishi, D. Dubois and H. Prade: An Approach to the Analytic Hierarchy Process using Fuzzy Reciprocal Matrix, *Proceedings 10th IPMU*, 2004.
- [16] 大西真一，古川貴司，山ノ井高洋：ファジィウエイト表現を用いた代替案従属AHP，第28回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，2012.