

タイトル	実在RC 造建物の確率論的地震時損傷評価
著者	串山， 繁； 高橋， 泰弘； Kushiyama, Shigeru； Takahashi, Yasuhiro
引用	工学研究 ： 北海学園大学大学院工学研究科紀要(13)： 17-24
発行日	2013-09-30

実在 RC 造建物の確率論的地震時損傷評価

串 山 繁*・高 橋 泰 弘*

Probabilistic Seismic Damage Estimation of An Actual Reinforced Concrete Structure

Shigeru Kushiyama* and Yasuhiro Takahashi*

1. はじめに

静的非線形問題や動的問題に対しては一般に陽な破壊確率算定式の表現は困難であるため、信頼性の問題に対してはサンプルの偏りを減らす、アルゴリズムを改良するなどの工夫を凝らした MCS (モンテカルロシミュレーション) が用いられてきた^{1),2)}。しかし、低損傷破壊確率を評価するためには多大な計算時間を必要とする難点がある。これを解決する手法として、上記とは異なる視点から、地震時リスク問題を考慮した低損傷破壊確率を効率的に計算するための部分集合シミュレーション法 (subset 法) が提示された³⁾。

そのアイディアは、小さな破壊確率をそれより大きな条件付破壊確率の積として表現することにより、稀な破壊事象をシミュレートする問題をより頻繁な事象の条件付シミュレーションの問題に置き換えて計算負荷を大幅に軽減しようとするものである。その際、条件付サンプルを効率的に取り出すために、MCMC (マルコフチェーンモンテカルロシミュレーション) が使用される^{4),5)}。この部分集合シミュレーション法によれば、重点サンプリング手法で要求される様な確率変数に関する感度評価など特別な予備知識が無くても、破壊に至る部分集合を自動的に検索して解を求めることができる。

本論では実在の RC 造 11 層建物を例に地震動を確定的、構造特性を不確定と仮定し、subset MCMC を用いてシミュレーションベースで建物の破壊生起確率 (逆の見方では安全性) を定量的に評価することを試みた。

2. Subset MCMC を用いた破壊確率

Siu-Kui Au により提案された subset シミュレーションの概念は次の様である。複数の確率変数 θ で構成される全体集合の空間ベクトルを F_1 , その部分集合を F_i , 破壊領域を $F_m = F$ と置き、次式のように表せると仮定する。

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_m = F \quad (1)$$

$$F_k = \bigcap_{i=1}^k F_i, \quad \text{ただし } k=1, \dots, m \quad (2)$$

このとき、条件付確率の定義により次式を得る。

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^m F_i\right) \\ &= P(F_m | \bigcap_{i=1}^{m-1} F_i) P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} F_i\right) \\ &= P(F_m | F_{m-1}) P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} F_i\right) = \cdots \\ &= P(F_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(F_{i+1} | F_i) \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式は破壊確率が $P(F_1)$ および一連の条件付確率 $\{P(F_{i+1} | F_i); i=1, \dots, m-1\}$ の積として表わされることを意味している。 $P(F_1)$ は標準 MCS を用いて評価される。一方、条件付確率は、次式で表わされる条件付確率密度関数を目標分布としたシミュレーションにより評価される。

$$q(\theta | F_i) = q(\theta) I_{F_i}(\theta) / P(F_i) \quad (4)$$

ただし、 $q(\theta | F_i); F_i$ に存在しているとして与えられた θ の条件付確率密度関数、 $I_{F_i}(\theta)$: 指標関数、 θ が F_i に含まれるなら 1, そうでないならば 0. その際、MCMC は条件付サンプルを効率的に取り出すために使用される。

* 北海学園大学工学研究科建設工学専攻 (建築系)

Graduate School of Engineering (Architecture and Building Eng.), Hokkai-Gakuen University

3. 入力地震動および解析モデル

入力地震動は表-1に示す強震観測網：K-netのHKD180観測点（北緯43.1390，東経141.3513：札幌市北区土木センター）で記録された地震動7波，設計で多用される実地震動4波である。ただし，これら実地震動は地表面最大速度：PGV（Peak Ground Velocity）を50kineに基準化したレベル2地震動とした。解析モデルは，RC造11層，X方向2スパン，Y方向2スパン建物をせん断型架構に置換した表-2に示す構造階高，層重量を有する質点系モデルである。

表-1 入力地震動
(50 kine に基準化したレベル2相当の地震動)

No.	地震名／レベル2模擬地震動
1	2003年十勝沖地震 NS
2	釧路沖地震 EW
3	岩手県沿岸北部地震 NS
4	東北地方太平洋沖地震 NS
5	余市岳近傍の地震 NS
6	北広島市北海道中央農場近傍の地震 NS
7	清田区真栄北嶺高校近傍の地震 NS
8	JMA 神戸 1995 NS
9	Hachinohe 1968 NS
10	Tohoku Univ. 1978 EW
11	El Centro 1940 NS

注) No.1～No.7：HKD180記録波，
No.5～No.7：仮の地震名を付与

表-2 解析建物の構造階高，層重量

階	11F	10F	9F	8F	7F	6F	5F	4F	3F	2F	1F
構造階高(cm)	295	295	295	295	295	295	295	295	295	295	490
層重量(kN)	4022	4176	4282	4282	4311	4330	4426	4446	4486	4550	4724

4. 解析仮定

非線形応答解析を行う際，スケルトンカーブはtri-linear型，それに随伴させる履歴則はmasing型と仮定した。また，構造物の粘性減衰は，最初の2次迄の固有振動モードの減衰を5%と仮定したRayleigh減衰を考慮している。なお，時刻歴の解析には，Wilsonの θ 法($\theta=1.42$)を用いた。

一方，構造物の破壊指標は各階時刻歴層間変位から得られる最大層間変形角(MCDR：Maximum Column Drift Ratio)および最大応答塑性

率の2通りを考慮した。なお，11層建物の場合には超高層建物においてしばしば観察される地震の揺れ終了後の大きな揺れは無いものと考え，計算時間の節約から以下の計算打ち切り時間を採用した。

計算打ち切り時間⇒最大振幅発生時間+5秒

最大振幅発生時間とはPGA，PGV，PGD発生時間の内，一番発生が遅い時間を意味する。

subset MCMCの計算においては，入力地震動を確定的，建物の構造特性を確率論的に取り扱い，具体的な確率変数として，各層の第1，第2剛性：SK1，SK2と各層の層降伏せん断力 V_{jy} を考えた。ただし，同時に変動させるのは2つと仮定した。以後，3つの中から2つを選択したパラメータをX1，X2と呼ぶ。表-3に示す夫々の期待値は準備計算のpushover解析から得た層間変位～層せん断力関係をtri-linearに置換して規定した。第1，第2層剛性を組み合わせる場合には変動係数を $\delta=5\%$ ，第2層剛性と層降伏せん断力の場合には $\delta=2\%$ とし，以下の正規分布に従い，互いに独立に変動すると仮定した。

第1層剛性： $N(\mu_1, \sigma_1)=N(SK1, \delta SK1)$

第2層剛性： $N(\mu_2, \sigma_2)=N(SK2, \delta SK2)$

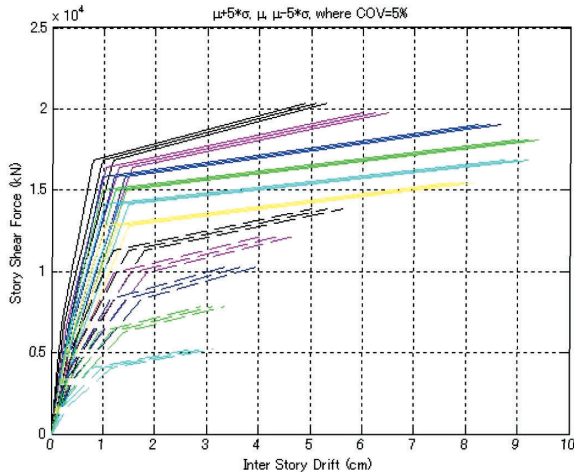
層降伏せん断力： $N(\mu_3, \sigma_3)=N(V_{jy}, \delta V_{jy})$

図-1に，上記の変動係数に従ったX方向フレームの変動域を示す。

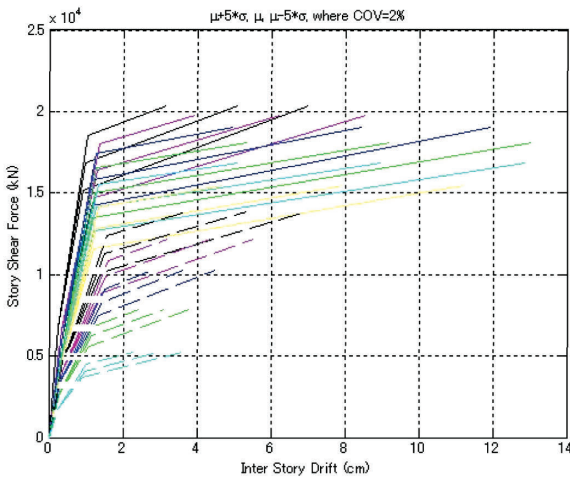
計算のフローは次の通りである。先ず標準モンテカルロシミュレーション(MCS)を行う。ここでは，サンプル発生総数に等しい n_t 回の応答計算を行い，層間変形角或いは応答塑性率が最大値を示す頻度が最も多くなる最弱層を特定する。次いで，subset MCMCの計算に進むが，ここでは単純の為に上記で特定した最弱層のパラメータ値X1，X2のみsubset MCMCの計算対象とし，他

表-3 降伏時層せん断力，層剛性（期待値）

階	X方向フレーム			Y方向フレーム		
	降伏時 層せん断力(kN)	第1層剛性 (kN/cm)	第2層剛性 (kN/cm)	降伏時 層せん断力(kN)	第1層剛性 (kN/cm)	第2層剛性 (kN/cm)
11F	4089	7193	3205	4297	5633	2854
10F	6237	9609	4119	7166	7618	3796
9F	8296	10604	4368	9477	8972	5179
8F	9891	11296	5010	11361	10279	5601
7F	11267	12083	6010	12911	11494	7074
6F	12862	13175	8755	14355	12177	7104
5F	14122	14441	9629	15658	12657	6929
4F	15025	15372	10634	16772	13221	7277
3F	15824	16617	11393	17653	14138	8113
2F	16389	18916	10287	18462	15712	8856
1F	16869	27463	13560	18974	20426	11978



(a) 第1層剛性，第2層剛性を変動させた場合



(b) 第2層剛性，層降伏せん断力を変動させた場合

図-1 スケルトンカーブの変動域（X方向フレーム）

の層の X1, X2 については初回の MCS 計算で発生した値を流用した。その理由は、各チェーンレベルの計算時間の増大と破壊に至る迄のチェーンレベル数の増大を避ける為である。本来ならば、他の層も含めて subset MCMC の計算対象とすべきと思われるが、採択率低下が懸念されること、一方でパラレルなシミュレーション回数を増すことにより、その弊害を低減できると考えた。

なお、本計算例では破壊確率 $P_f=10^{-7}$ のオーダー迄計算することを念頭に、MCDR を破壊指標とした場合には非常に大きな許容層間変形角の値を与え $Z=1/5-MCDR$ とし、最大応答塑性率を破壊指標とした場合には、 $Z=5-\mu_{\max}$ として限界状態関数 Z を規定した。サンプルは generic Metropolis algorithm に従い生成し⁴⁾、各 subset の発生総数 $n_t=600$ は、発生サンプルが定常状態に到達したか否かを調べる Raftery-Lewis の取

束診断に基づき決定した⁶⁾。

5. 質点系モデルの時刻歴応答解析法

多質点減衰系の運動方程は次式で表示される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y} \quad (5)$$

ただし、 m ：質量マトリックス、 c ：減衰マトリックス、 k ：瞬間剛性マトリックス、 $\ddot{x}$ ：相対加速度ベクトル、 $\dot{x}$ ：相対速度ベクトル、 x ：相対変位ベクトル、 $\ddot{y}$ ：地動加速度

減衰マトリックスについては、上部構造の1次、2次減衰定数として5%を仮定した Rayleigh 減衰を考慮する。

各種エネルギーは、非線形システムの運動方程式を次の様に積分して定義される。

$$\int_0^x m\ddot{x}_t dx + \int_0^x c\dot{x}_t dx + \int_0^x kx_t dx = - \int_0^x m\ddot{y}_t dx \quad (6)$$

右辺は、地震動が発生してから変位 x に至るまでに構造物へ入力された総入力エネルギー $E_i(t)$ である。(6)式の左辺第1項は、地表面に対する相対運動エネルギー $E_k(t)$ 、第2項は粘性減衰によって消費される減衰エネルギー $E_d(t)$ 、第3項は復元力 $kx=f_s(t)$ の成す仕事であり、構造物の弾性歪エネルギー $E_s(t)$ 、ひび割れによって消費される歪エネルギー $E_c(t)$ 、降伏によって消費される歪エネルギー $E_v(t)$ の総和に等しい。復元力を $f_s(t)$ と置くと、

$$\int_0^x f_s(t) dx = E_s(t) + E_c(t) + E_v(t) \quad (7)$$

ただし、 $E_c(t) + E_v(t)$ は塑性歪エネルギー $E_p(t)$ を意味する。

6. 解析モデルの基本応答性状

固有値解析結果によると、解析建物の弾性固有周期は、表-4 に示す様に1次の値でX方向フレーム 0.7604(sec), Y方向フレーム 0.8204(sec)

表-4 建物の弾性固有周期 (sec)

フレーム	1次	2次	3次	4次
X方向	0.7604	0.2788	0.1729	0.1277
Y方向	0.8204	0.3044	0.189	0.1396

注) 5次～11次の弾性固有周期は省略

であった。以下では、表-3に示した当該建物の構造特性期待値を与えた単純な応答解析結果、具体的には図-2に示す50kineに基準化したNo.8地震動(1995 JMA 神戸 NS)が建物のX方向フレームに作用した結果について詳述後、その他の地震動を受けた場合の主要な結果について概観する。

図-3に層間変位の時刻歴を示す。同図によれば、層間変位が大きく、ドリフトが生じている。それは図-4(a)に示した1階の復元力特性を見ても分かる様に、降伏領域に損傷が進展した為に生じた現象である。各階の損傷状況は図-4(b)に示した応答塑性率の高さ方向分布図より、最上階を除く全ての階で応答塑性率が1を越え、層降伏している。

図-5に示した単位質量当たりの消費エネルギー

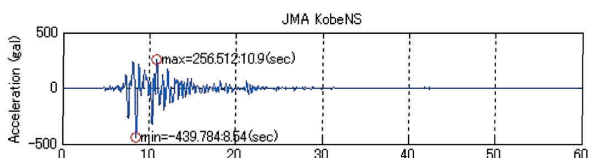


図-2 入力地震動：1995 JMA 神戸 NS
(50 kine に基準化)

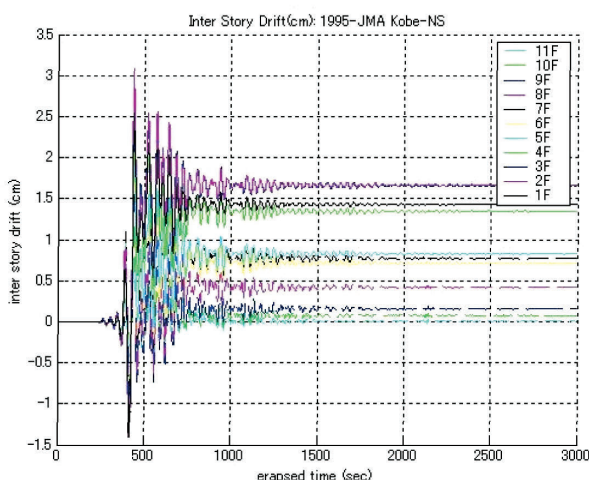
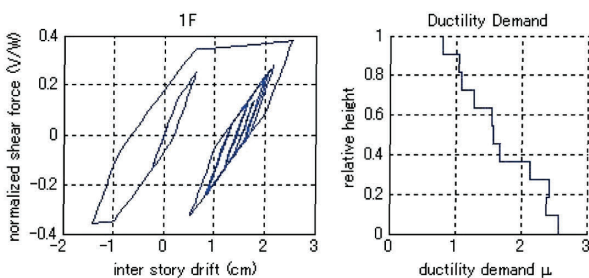


図-3 層間変位の時刻歴 (X方向フレーム)



(a) 復元力特性

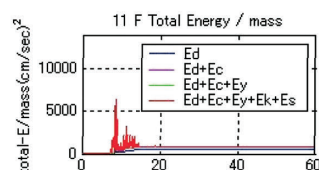
(b) 各階応答塑性率

図-4 復元力特性 (1F), 各階応答塑性率

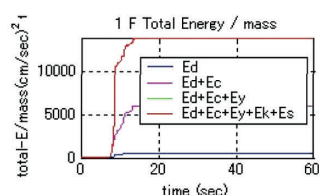
ギーの時間推移について上下の図を見較べると、塑性化の進展に伴いひび割れエネルギー E_c 、降伏エネルギー E_y が占める割合が減衰エネルギーのそれより大きくなる事が分かる。

一方、図-6はY方向フレームの結果の一部であるが、(a)図に示した1階の復元力特性を図-4(a)と比較すると、Y方向フレームの方が降伏域がやや狭いことが分かる。これは(b)図にも反映されており、1階のみならずほぼ全階で先の図-4(b)のX方向フレームの応答塑性率よりY方向フレームの方が小さい。No.7, No.9の地震動についても同様の比較をしたが、やはりY方向フレームの方が小さかった。これは、当該建物ではX方向フレームがY方向フレームよりもやや耐震性が劣ることを意味している。これを受け、以下の解析ではX方向フレームについてのみ実施した。

図-7に示した全地震動に対する応答塑性率によれば、全階を通して応答塑性率が1未満となったのはNo.1, No.4, No.5のみである。高さ方向に沿った応答塑性率分布パターンは、①低層階で応答塑性率が大きく、上層に向かうに従い応答塑

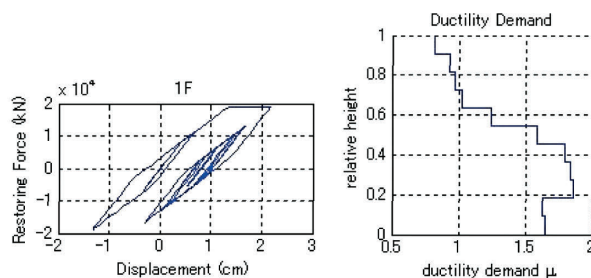


(a) 11F 消費エネルギー



(b) 1F 消費エネルギー

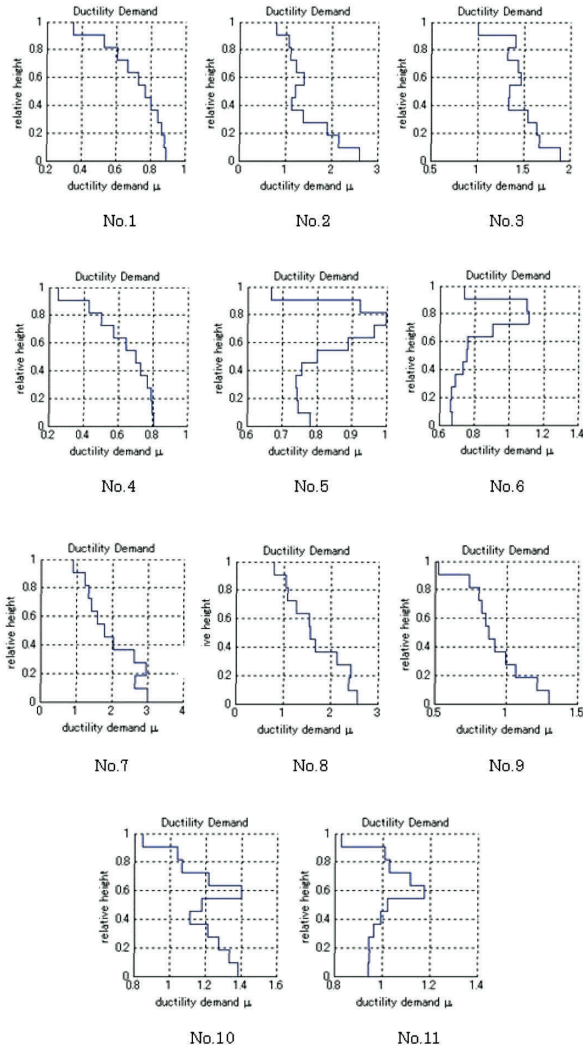
図-5 消費エネルギーの時間推移 (X方向フレーム)



(a) 復元力特性

(b) 各階応答塑性率

図-6 復元力特性, 各階応答塑性率 (Y方向フレーム)

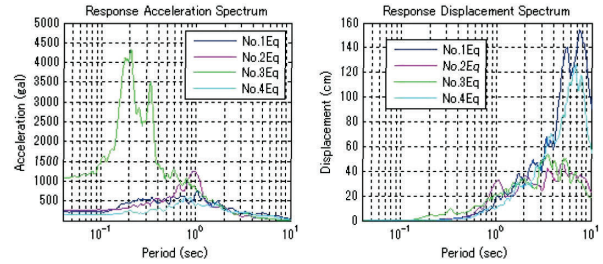


注) No.: 表-1 に対応する入力地震動番号

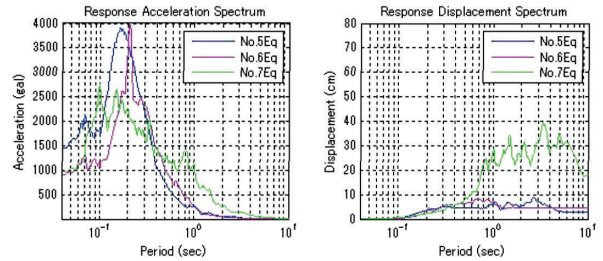
図-7 応答塑性率 (X方向フレーム)

性率が低減するパターン (No.1~No.4, No.7~No.9), ②中層の7階で応答塑性率が大となるパターン (No.10, No.11), ③上層8~10階で応答塑性率が大となるパターン (No.5, No.6) と様々である。

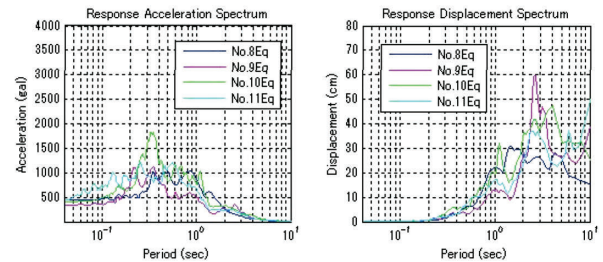
次に、最弱層の応答塑性率の大小関係を図-8に示す加速度応答スペクトルを参照して説明する。同図(b)によれば、建物のX方向フレーム弾性1次固有周期 $T_1=0.7604(\text{sec})$ 付近では加速度応答が $\text{No.7} > \text{No.6} > \text{No.5}$ であり、図-7の最弱層の応答塑性率の大小関係; $\text{No.7} > \text{No.6} > \text{No.5}$ と符合している。同様に図-8(a) No.1~No.4の上記 T_1 付近では、 $\text{No.2} \approx \text{No.3} > \text{No.1} \approx \text{No.4}$ であり、図-7の最弱層の応答塑性率の大小関係; $\text{No.3} > \text{No.2} > \text{No.1} \approx \text{No.4}$ とほぼ符合している。No.8~No.11についてもほぼ妥当な対応関係にある。以上か



(a) HKD180 で観測された海溝型地震動 ($h=5\%$)



(b) HKD180 で観測された札幌近郊直下型地震動 ($h=5\%$)



(c) 設計で多用される地震動 ($h=5\%$)

図-8 50 kine 基準化地震動加速度応答スペクトル

ら、異なる地震動を受ける際の最弱層の応答塑性率の大小関係は、建物の弾性1次固有周期 T_1 付近の加速度応答スペクトルの大小関係から概ね予測できると云えよう。

7. 感度解析結果

subset 法では、特別な知識無しで複数のパラメータを同時に変動させながら、限界状態関数 Z の値を小さくする (即ち、破壊判定指標値を大きくする) パラメータを自動的に見出すことが可能である。この際、変動幅の小さいパラメータが破壊判定指標値の変動に大きく寄与し、感度が大であることを意味するが、相対的な感度の大小関係のみ把握できる。感度解析を行うに当たり、表-5に示す2通りのパラメータの組み合わせを考え、この計算ではパラメータの初期値の違いが結果に及ぼす影響が小さいことを考慮し、パラレルなシミュレーション回数を1回 (MCS, subset1~4 ま

表-5 パラメータの組み合わせ

識別ラベル	パラメータの組み合わせ (X1, X2)
a	(第1層剛性, 第2層剛性)
b	(第2層剛性, 層降伏せん断力)

での計算, 各々600回, 計3000回の応答解析を1回とカウント)とした。以下に最大応答塑性率を破壊判定指標とした結果について述べ, 必要に応じて最大層間変形角(MCDR)の結果と比較する。

全地震動に対する結果によれば, 1階が最弱層となる場合が多く, その割合は発生頻度平均値より46.5%, 次いで9階(13%), 7階(12%), 3階(11%)の順となり, 最弱層は先に示した図-7の各階塑性率の分布図で最大応答塑性率となる階と殆ど一致した。しかし, 最大層間変形角を破壊判定指標とした場合には, 1階の構造階高が他の階に較べ表-2に示した様に大である為, 最大層間変形角が相対的に小さく評価され, 1階が最弱層と判定されたケースは無かった。

次に, 図-9に示したパラメータの組み合わせbに関するsubsetのサンプルパラメータの散布図について述べる。subset-4の緑色マーカー(限界状態関数Zの値が小さい1割のサンプル)のパラメータの変動幅に着目すると, 感度の相対的大小関係は, case02, 06共SSy(層降伏せん断力)>

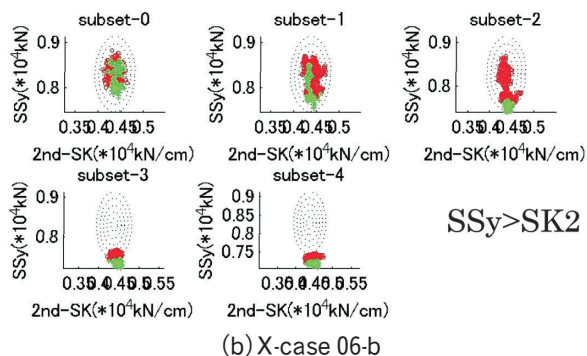
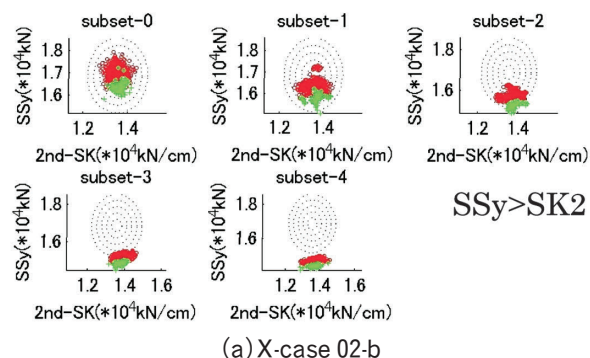


図-9 各 subset のサンプルパラメータ散布図

表-6 感度解析結果 (破壊指標: 最大応答塑性率)

パラメータの組み合わせ a	地震動 No.	パラメータの組み合わせ b	地震動 No.
SK2>SK1	1, 2, 3, 5, 7, 8, 11	SSy>SK2	全ての地震動
SK2=SK1	6, 10		
SK2<SK1	4, 9		

SK2(第2層剛性)となった。他の地震動についても表-6に示す通り同様の大小関係であった。MCDRを指標とした場合には, 損傷の程度が軽微なcase01, 04, 05, 06の4例についてのみ上記と異なる結果が得られた。一方, パラメータの組み合わせaの感度の相対的大小関係については, 表-6に示す通りであり, 若干ばらつきが見られたが, 感度の相対的大小関係は概ねSSy>SK2>SK1と云えよう。

8. 定量的破壊確率評価

表-7は, 2つの破壊判定指標が同一階で最弱層と判定した結果を用いて $\mu_{\max}/\text{MCDR}(\%)$ を求めた結果である。表-8は, 一般的にMCDRで与えられる設計用クライテリアと上記平均値を用いて最大応答塑性率に読み替えたクライテリアを併記している。最大応答塑性率は限界状態の定義と矛盾するが, これは実被害よりも中低層建物の応答解析結果が厳しい評価となり易いことの現れである。図-10にパラメータの組み合わせbに関するパラレルなシミュレーションを50回行った最大応答塑性率～破壊生起確率関係を示す。同図中の黒線は, アンサンブル平均を表し, 表-9はGelman-Lubinの収束判定指標 R^2 値の最終値を表している。上記収束判定基準によれば, 収束したと見做せるのは R^2 値が少なくとも1.1～1.2以下とある⁷⁾。したがって, いずれも基準を満足している。

case10の図は省略したが, 図-10横軸の応答塑性率を比較すると, No.2の釧路沖地震動, 次いでNo.8のJMA神戸地震動が大きいことが分かる。なお, この破壊確率はレベル2相当の地震動を受けたとした場合の確率である。

図-10(a), (c)によれば, 計算終了時(破壊確率 $(1/601) \times (0.1)^4 = 1.664 \times 10^{-7}$)には応答塑性率がアンサンブル平均で人命安全限界とする4.4を大きく上廻っている。

ただし, 居住用建物の年リスクを 1×10^{-6} , レベ

表-7 $\mu_{\max}$ と MCDR の対応関係

解析ケース名	最弱層	最大応答 塑性率 $\mu_{\max}$	最大層間変形角 MCDR(%)	$\mu_{\max}/\text{MCDR}(\%)$
X-case 05-b	9	1.338	0.562	2.381
X-case 06-a	9	1.344	0.728	1.846
X-case 06-b	9	1.575	0.616	2.557
X-case 07-a	3	2.969	1.3	2.284
X-case 07-b	3	4.741	1.68	2.822
X-case 10-a	7	1.467	0.982	1.494
X-case 11-a	7	1.305	0.8	1.631
X-case 11-b	7	2.056	0.817	2.517

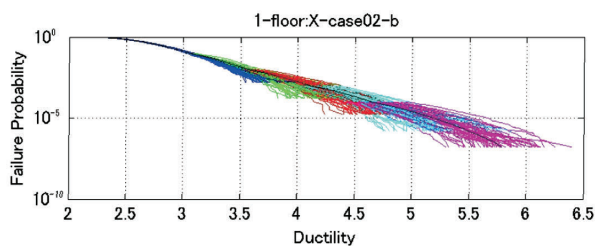
平均 2.1915

表-8 設計用クライテリア（限界状態の定義）

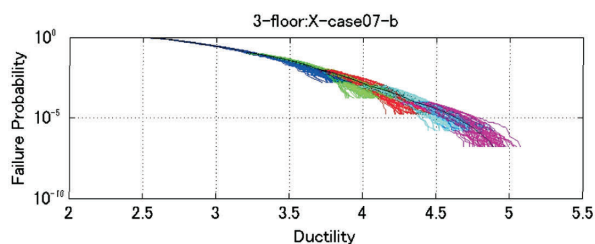
最大層間変形角	最大応答塑性率	限界状態
1/800 (0.125%)	0.27	2 次壁（非構造部材）のひび割れ発生
1/200 (0.5%)	1.1	使用限界（構造部材のひび割れ発生）
1/100 (1%)	2.2	初期損傷（降伏部位の発生）
1/50 (2%)	4.4	人命安全限界

表-9 R^2 , 計算所要時間

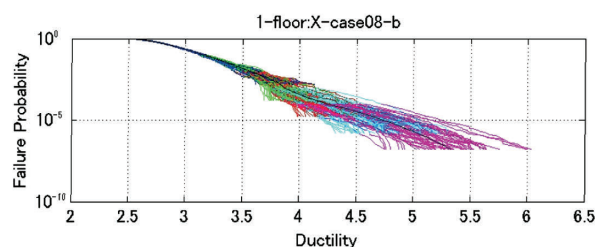
case name	X-case 02-b	X-case 07-b	X-case 08-b	X-case 10-b
R^2	1.0064	1.0082	1.0135	1.0083
time(days)	14.8032	9.3803	1.6649	1.7392



(a) No. 2



(b) No. 7



(c) No. 8

図-10 最大応答塑性率～破壊生起確率の関係

ル 2 相当地震動が 50 年で 10% の超過確率を有すると仮定すると地震の生起確率は 2.1×10^{-3} (= 1/475 : 再現期間 475 年) となり, $1 \times 10^{-6} / 2.1 \times 10^{-3} = 4.76 \times 10^{-4}$ の値が居住用建物の年リスクに対応する図-10 の縦軸値となる。これに対応する応答塑性率は No.2 の釧路沖地震動で約 4.3, No. 8 の JMA 神戸地震動約 3.9 であり, 人命安全限界 4.4 には至っていない。ただし, 先に述べた中低層建物の応答解析結果が実被害よりも厳しい評価となり易い点を踏まえると, 人命安全限界に至るには更に余裕があると思われる。

9. 結語

Subset MCMC を用いて, レベル 2 地震動を想定した実在の RC 造 11 層建物の定量的損傷評価を試みた。得られた結果は次の通りである。

- 1) 構造階高に著しい相違がある場合には, 破壊判定指標として最大層間変形角ではなく, 最大応答塑性率を用いた方が最弱層を的確に把握できる。
- 2) 感度の相対的大きさは, 層降伏せん断力 > 第 2 層剛性 > 第 1 層剛性が妥当と推察される。
- 3) 居住用建物の年リスクを 1×10^{-6} 程度と仮定したレベル 2 地震動入力時許容リスクに対応する塑性率は, 最も損傷が大きかった釧路沖地震 EW 50kine 基準波でも人命安全限界状態までには至らない。

【参考文献】

- 1) Howard H. M. Hwang and Jing-Wen Jaw: "Probabilistic Damage Analysis of Structures", Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 7, ASCE, July, 1990, pp.1992-2007.
- 2) F. Yamazaki, M. Shinozuka: "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1988, 114 (8), pp.1335-1354.
- 3) S. K. Au and J. L. Beck: "Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamics Analysis", Journal of Engineering Mechanics, 2003, pp.901-917.
- 4) W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter, "Introducing Markov chain Monte Carlo", In: W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter, Ed., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, CHAPMAN

- & HALL/CRC, 1996, pp.1-19.
- 5) B. Walsh: “Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling”, Lecture note for EEB 596z, 2002.
- 6) A. E. Raftery and S. M. Lewis: “The Number of Iterations, Convergence Diagnostics and Generic Metropolis Algorithms”, <http://www.stat.washington.edu/www/research/online/>
- 7) Andrew Gelman, “Inference and monitoring convergence”, In: W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter, Ed., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, CHAPMAN & HALL/CRC, 1996, pp.131-143.