

タイトル	裏面剥離の1次元モデル
著者	世戸，憲治；野中，泰二郎；SETO, Kenji；NONAKA, Taijiro
引用	北海学園大学工学部研究報告(40)：65-79
発行日	2013-02-12

裏面剥離の1次元モデル

世戸 憲治* ・ 野中 泰二郎**

One-Dimensional Model of Spalling Damage of Concrete Plates

Kenji SETO* and Taijiro NONAKA**

要 旨

コンクリート壁に飛翔物体が衝突したとき衝突した面とは反対側の裏面に剥離が起こる現象について、前回の論文では数値解法による3次元解析を試みたが、今回の論文では1次元に次元を下げることで理論解を求め、数値解法とは異なる面からこの現象の解明をはかる。なお、ここでは、一般解から出発して解く方法と固有値・固有関数を用いて解く方法の2とおりの解法を試みる。これら2とおりの解法における解の形はまったく異なるものであるが、数値的には非常に精度で一致することを示す。

0 はじめに

コンクリート壁に飛翔物体を衝突させたとき、図1に示すような裏面剥離が生じることがある^{1)~4)}。ここではこの飛翔物体を弾丸ということにして、弾丸の速度が小さいうちは、衝突面が破壊されるだけであるが、弾丸速度を上げるにしたがいここで問題とする裏面剥離が起こる。さらに弾丸速度を上げると弾丸はコンクリート壁を貫通してしまう。この裏面剥離には以下に掲げるような疑問点が生じる。

- (1) コンクリートの中間部は破壊されないのに何故裏面が破壊されるのか。
- (2) しかも裏面は自由表面になっているので、そこでの歪みはゼロであるにもかかわらず裏面剥離が起こるのは何故か。
- (3) コンクリートの裏面は球面状にはぎ取られたように破壊されるがこの理由はなにか。

などである。現著者らはこの問題と取り組むため先の論文「無限に広い弾性板の衝撃問題について」⁵⁾を著した。そこでは、コンクリートを弾性体として3次元の解析を試みたが、解析解が求められないために、数値計算に頼らざるを得なかった。数値計算では一定の結果は得られるが、上記の疑問に対する解答を得ることは難しく、やはり、解析解を求めることがぜひ必要である。



図1 裏面剥離

* 北海学園大学名誉教授 Emeritus Professor of Hokkai-Gakuen University
** 京都大学名誉教授 Emeritus Professor of Kyoto University

この論文では、上記理由から裏面剥離の 1 次元モデルを提供する．もちろん、1 次元モデルでは実験結果と比較できるような定量的結果を得ることは不可能であるが、上記疑問に対する定性的な解答を得ることは可能であると考えられる．

1 方程式の導入

ここでは、弾性理論が適用できる棒（以下、弾性棒と呼ぶ）を考え、この長さ方向の縦振動を扱う．この弾性棒の長さを ℓ 、断面積を S 、Young 率を E 、密度を ρ とする．棒の長さ方向に x 軸をとり、一端を $x = 0$ 、他端を $x = \ell$ とする．この弾性棒に変形が起こる前に座標 x にあった棒の部分が変形を起こしたとき、時刻 t での縦方向変位を $U(x, t)$ とする．すなわち、初めに x にあった部分は $x + U(x, t)$ に移動するものとする．このとき、座標 x における歪みは変位の x 微分、 $\partial_x U(x, t)$ で表わされる．いま、座標 x と $x + \Delta x$ に挟まれる部分の運動を考えると、 $x + \Delta x$ の点で歪みによって作用する力は $ES\partial_x U(x, t)|_{x+\Delta x}$ 、また、点 x で作用する力は、 $-ES\partial_x U(x, t)|_x$ となり、この挟まれる部分の質量は、 $\rho S\Delta x$ なので、運動方程式

$$\rho S\Delta x \partial_t^2 U(x, t) = ES[\partial_x U(x, t)|_{x+\Delta x} - \partial_x U(x, t)|_x] \quad (1.1)$$

を得る．この式は $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で、波動方程式

$$\partial_t^2 U(x, t) = c^2 \partial_x^2 U(x, t) \quad (1.2)$$

となる．ここに、 c は波動伝播速度で、

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (1.3)$$

で定義される．

2 一般解から導出する方法

この節では弾性棒の一端 $x = 0$ に質量 m 、速度 v_0 の弾丸を衝突させた場合の解を求める．よく知られたように波動方程式 (1.2) は一般解

$$U(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (2.1)$$

を持つ．ここに、 f, g は任意の関数であり、 $f(x - ct)$ は右進行波、 $g(x + ct)$ は左進行波を表す．初めにこの一般解を利用した解法を試みる．

弾丸の運動

弾丸が弾性体に衝突したときを時刻 $t = 0$ とし、その接触面の座標を $D(t)$ とする．もちろん、弾丸が弾性体に接触しているあいだは、

$$D(t) = U(0, t) \quad (2.2)$$

である．ここでの $D(t)$ は、弾丸衝突の結果として求めるべきものである．この弾丸の運動方程式は、弾性体から受ける反力を考慮して、

$$m \frac{d^2 D(t)}{dt^2} = ES\partial_x U(x, t)|_{x=0} \quad (2.3)$$

となる．このままでは D も U も未知関数なので解きようがないが，ここで一般解を利用する．反射波が戻ってこない時間範囲では，右進行波のみが存在するので，

$$U(x, t) = f(x - ct) \quad (2.4)$$

としてよく，この式および (2.2) 式から，

$$D(t) = f(-ct), \quad \partial_x U(x, t)|_{x=0} = f'(-ct) \quad (2.5)$$

となる．さらに，この2本の式から，

$$\frac{dD(t)}{dt} = -c \partial_x U(x, t)|_{x=0} \quad (2.6)$$

となるので，運動方程式 (2.3) は

$$m \frac{d^2 D(t)}{dt^2} = -\frac{ES}{c} \frac{dD(t)}{dt} \quad (2.7)$$

となる．この方程式を1度積分し，

$$\frac{dD(t)}{dt} = A e^{-(ES/mc)t} \quad (2.8)$$

を得る．ここに， A は積分定数であるが，弾丸の初速度が v_0 であったので，

$$\frac{dD(t)}{dt} = v_0 e^{-(ES/mc)t} \quad (2.9)$$

と求められる．これをさらに積分し， $t = 0$ で $D(0) = 0$ を用いると，弾丸の動きが最終的に，

$$D(t) = \frac{mc v_0}{ES} [1 - e^{-(ES/mc)t}] \quad (2.10)$$

と求められる．関数 $D(t)$ がこの式のように弾性棒の長さおよび質量に無関係に決まることは不思議と言えなくもないが，弾丸が衝突したことは瞬時に棒全体に伝わるわけではなく，あくまで波動伝播速度の範囲内でしか伝わらないので，弾丸と接触した部分の物理定数で決まることになる．

以下，数式を次元的に見やすくするため，弾性棒全体の質量を M

$$M = \rho S \ell \quad (2.11)$$

とし，この式と波動伝播速度 c の定義式 (1.3) を用いて，(2.10) 式を

$$D(t) = \frac{m v_0}{M c} \ell [1 - e^{-(Mc/m\ell)t}] \quad (2.12)$$

と書き直すことにする．

この結果から，弾丸の速度はしだいに落ちていき，最終的に距離 $(m v_0 / M c) \ell$ だけ進むことになる．つまり，弾丸が初めに持っていた運動量 $m v_0$ が大きいほど進む距離が長くなり，それに対抗する弾性体の固さとも言うべき， $M c$ が大きいほど，進む距離は短くなる．

なお、以下での使用に関しては、ここで求めた弾丸の進む距離 $D(t)$ に単位階段関数 $\theta(t)$ を掛けて、

$$D(t) = \frac{mv_0}{Mc} \ell [1 - e^{-(Mc/m\ell)t}] \theta(t) \quad (2.13)$$

としておく。つまり、 $t < 0$ のときは衝突もなく、弾性体は静止していたということである。

入射波を求めること

関数 $D(t)$ が決まったので、反射が起きる前までの弾性棒の変位 $U(x, t)$ は、この (2.13) 式における時間 t を $t - x/c$ と置き換えることで、

$$U(x, t) = \frac{mv_0}{Mc} \ell [1 - e^{-(M/m\ell)(ct-x)}] \theta(ct - x), \quad 0 \leq t \leq \ell/c \quad (2.14)$$

と求められる。これは $x = ct$ を先端部として、一度変位が起これるとその変位は元に戻らずにそのまま尾を引くような波動伝播になる。

運動量保存とエネルギー保存

ここで、系全体の運動量保存則とエネルギー保存則を確かめてみよう。まず、(2.14) 式を時間 t で微分して、時刻 t , 座標 x における速度を求めると

$$\partial_t U(x, t) = v_0 e^{-(M/m\ell)(ct-x)} \theta(ct - x), \quad 0 \leq t \leq \ell/c \quad (2.15)$$

となるので、この時点で弾性棒が持つ運動量は、

$$\int_0^{ct} \rho S v_0 e^{-(M/m\ell)(ct-x)} dx = mv_0 [1 - e^{-(Mc/m\ell)t}] \quad (2.16)$$

となる。一方、この時点で弾丸が持つ運動量は (2.15) 式で $x = 0$ とすると、 $mv_0 e^{-(Mc/m\ell)t}$ となるので、これを (2.16) 式に加えるとちょうど弾丸が初めに持っていた運動量 mv_0 になる。

エネルギーに関しては、まず、(2.14) 式を x で微分して歪みを求めておくと

$$\partial_x U(x, t) = -\frac{v_0}{c} e^{-(M/m\ell)(ct-x)} \theta(ct - x), \quad 0 \leq t \leq \ell/c \quad (2.17)$$

となり、これから弾性棒の単位体積あたりの歪みエネルギーは

$$\frac{1}{2} E [\partial_x U(x, t)]^2 = \frac{1}{2} \frac{E v_0^2}{c^2} e^{-(2M/m\ell)(ct-x)} \theta(ct - x) \quad (2.18)$$

となる。一方、(2.15) 式から弾性棒の単位体積あたりの運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \rho [\partial_t U(x, t)]^2 = \frac{1}{2} \rho v_0^2 e^{-(2M/m\ell)(ct-x)} \theta(ct - x) \quad (2.19)$$

となる。実はこれら (2.18) と (2.19) 式は伝播速度 c の定義式 (1.3) を用いると同じ式になる。

弾性棒全体の歪みエネルギーと運動エネルギーの和は

$$\int_0^{ct} \frac{1}{2} \{ E [\partial_x U(x, t)]^2 + \rho [\partial_t U(x, t)]^2 \} S dx = \frac{1}{2} m v_0^2 [1 - e^{-(2Mc/m\ell)t}] \quad (2.20)$$

となり、この結果に、弾丸がこの時点で持つ運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_0^2 e^{-(2Mc/m\ell)t}$ を加えるとちょうど弾丸が初めに持っていた運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_0^2$ に等しい。

歪みの大きさについて

(2.17) 式からわかるように、波動伝播の先端部 $x = ct$ で歪みの大きさは最大となりその大きさは弾丸の打ち込み速度 v_0 と波動伝播速度 c の比 v_0/c となる。もし、弾性体中での超音速 $v_0 > c$ で打ち込んだときは歪みが 1 より大きくなってしまいますが、このときは弾性理論そのものが成立しなくなる。このように歪みの大きさの最大値が v_0/c と弾丸の質量にも、弾性体の質量にも無関係に決まってしまうことは不思議ではあるが、最大になるのは波動の先端部でピーク的に最大になるのであり、弾丸の質量が小さいときは、そのピークの幅は空間的にも時間的にも狭くなる。

反射波を取り入れたときの解

弾丸を衝突させた弾性棒の端 $x = 0$ とは反対側の $x = \ell$ で波がどのように反射するかはその端が自由端であるか固定端であるかによって違ってくる。ここでは、裏面剥離の現象に合わせて自由端の場合、すなわち、 $x = \ell$ での境界条件を

$$\partial_x U(x, t)|_{x=\ell} = 0 \quad (2.21)$$

と設定した場合を考える。自由端では歪みがゼロとなることが条件である。この境界条件に一般解 (2.1) を当てはめると、

$$f'(\ell - ct) + g'(\ell + ct) = 0 \quad (2.22)$$

となり、これを ct で積分し、積分定数をゼロとすると

$$g(\ell + ct) = f(\ell - ct) \quad (2.23)$$

となる。ここで時間 t は任意なので、これをずらして、 $ct \rightarrow ct + x - \ell$ としてやると

$$g(x + ct) = f(2\ell - x - ct) \quad (2.24)$$

となる。ここで、関数 $f(x - ct)$ が $x = 0$ での弾丸衝突によって発生した入射波とすると、 $g(x + ct)$ は $x = \ell$ で発生する反射波と理解できる。この式を用いると (2.1) 式は

$$U(x, t) = f(x - ct) + f(2\ell - x - ct) \quad (2.25)$$

と書き換えられる。なお参考までに、 $y = f(x - ct)$ は $y = f(x)$ を ct だけ右方向にずらしたものであり、 $y = f(2\ell - x)$ は $y = f(x)$ を $x = \ell$ の周りに反転したもの、 $y = f(2\ell - x - ct)$ はこれをさらに左方向に ct だけずらしたものである。またこの式から、自由端の $x = \ell$ では入射波と反射波が重なるため振幅が 2 倍の $2f(\ell - ct)$ となることがわかる。

ここで得られた (2.25) 式のより具体的な形は、(2.14) 式が入射波の $f(x - ct)$ に対応することから、この式で $t \rightarrow t + (2x - 2\ell)/c$ とずらすことで反射波が得られ、

$$U(x, t) = \frac{mv_0}{Mc} \ell \left\{ [1 - e^{-(M/m\ell)(ct-x)}] \theta(ct - x) + [1 - e^{-(M/m\ell)(ct+x-2\ell)}] \theta(ct + x - 2\ell) \right\} \\ 0 \leq t < 2\ell/c \quad (2.26)$$

と与えられる．これで，弾丸衝突が起こった時刻ゼロから，波が弾性棒を往復する時刻までの解を求めることができたが，これ以上大きな時間に対して解を求めることは，この方法では困難になる．なぜなら，波が原点に戻った後は，(2.4) 式ではすまなくなるので，運動方程式 (2.3) は微差分方程式となり，これを解くことは容易ではなくなるためである．

変数の無次元化

コンピュータ・シミュレーションを作成する前に，ここで得た解を無次元化しておこう．弾性棒の長さ ℓ を長さの単位として，座標 x ，変位 $U(x, t)$ を，それぞれ，改めて

$$x/\ell \rightarrow x, \quad U(x, t)/\ell \rightarrow U(x, t) \quad (2.27)$$

とし，また，時間については弾性棒の長さ ℓ を波動が伝播する時間を単位として

$$ct/\ell \rightarrow t \quad (2.28)$$

および，

$$v_0/c \rightarrow v_0, \quad m/M \rightarrow \mu \quad (2.29)$$

と置き直すことにする．この無次元化で (2.26) 式は

$$U(x, t) = \mu v_0 \left\{ [1 - e^{-(t-x)/\mu}] \theta(t-x) + [1 - e^{-(t+x-2)/\mu}] \theta(t+x-2) \right\} \\ 0 \leq t < 2 \quad (2.30)$$

に変換される．また，これを x および t で微分した歪み $\partial_x U(x, t)$ と無次元速度 $\partial_t U(x, t)$ は，それぞれ，

$$\partial_x U(x, t) = v_0 \left[-e^{-(t-x)/\mu} \theta(t-x) + e^{-(t+x-2)/\mu} \theta(t+x-2) \right], \quad 0 \leq t < 2 \quad (2.31)$$

$$\partial_t U(x, t) = v_0 \left[e^{-(t-x)/\mu} \theta(t-x) + e^{-(t+x-2)/\mu} \theta(t+x-2) \right], \quad 0 \leq t < 2 \quad (2.32)$$

となる．(2.32) 式から，速度は入射波，反射波共に正となることに注意する．一方，(2.31) 式から歪みの方は入射波で負，反射波で正となるので，入射波は圧縮波，反射波は膨張波であることがわかる．つまり， $x = \ell$ の端で反射するとき，圧縮波が膨張波に変わるので，それまで負の歪みであったものが急激に正の引っ張り歪みに変化することになる．コンクリートの場合，引っ張り強度は圧縮強度の 10 分の 1 以下しかないと考えると，これが裏面剥離が起こる最大の原因と考えられる．このような現象を一般に spalling 現象，またこの現象によって破壊されることを spalling 破壊という⁶⁾．

3 固有値・固有関数を用いる別解法

ここで扱った問題を固有値・固有関数を用いる別解法で解いてみよう．実際は，前節で述べた方法よりも，この節での解法の方がむしろ一般的な方法と考えられる．問題を繰り返すと，弾性

棒の一端 $x = 0$ に質量 m の弾丸が速度 v_0 で衝突し、他端の $x = \ell$ は自由端とする。

境界条件、初期条件

境界条件として、前節と同じく、

$$m \frac{d^2 U(0, t)}{dt^2} = ES \partial_x U(x, t)|_{x=0}, \quad \partial_x U(x, t)|_{x=\ell} = 0 \quad (3.1)$$

を課す。また、この節では、弾丸と弾性棒が一体化された系を考え、弾丸は ε を無限小正数として、 $|x| < \varepsilon$ の範囲を占めるものとする。このときの初期条件として、

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (3.2)$$

および、弾丸に初速度 v_0 を与える条件、

$$\partial_t U(x, t)|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < x \leq \ell \end{cases} \quad (3.3)$$

を課す。あるいは、この (3.3) 式は階段関数 $\theta(x)$ を用いて、

$$\partial_t U(x, t)|_{t=0} = [1 - \theta(x - \varepsilon)]v_0 \quad (3.4)$$

と書き直した方が後のために便利である。

固有値・固有関数による解法

変位 $U(x, t)$ を、時間部分については振動数 ω の sine 関数で表わされるとして、

$$U(x, t) = X(x) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \quad (3.5)$$

とおく。 ω で割ったのは後の都合のためであるが、 $\omega = 0$ のときは、 $\sin(\omega t)/\omega \rightarrow t$ と置くことにする。この式を波動方程式 (1.2) に代入すると

$$c^2 \frac{d^2 X}{dx^2} = -\omega^2 X \quad (3.6)$$

となり、この解として、

$$X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (3.7)$$

ただし、波数 k と振動数 ω の関係は、

$$k = \omega/c \quad (3.8)$$

である。従って変位 $U(x, t)$ は

$$U(x, t) = [A \sin(kx) + B \cos(kx)] \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \quad (3.9)$$

と表わされる。これに境界条件 (3.1) の第1式をあてはめると

$$-k\ell mB = MA \quad (3.10)$$

となる．ここで，(3.8), (1.3) 式および，(2.11) で定義した弾性棒全体の質量 M を用いた．また，(3.9) 式に (3.1) の第 2 式をあてはめると

$$A \cos(k\ell) - B \sin(k\ell) = 0 \quad (3.11)$$

となる．これから係数 A, B が共にゼロとならないためには

$$\tan(k\ell) = -\frac{m}{M}k\ell \quad (3.12)$$

が成立しなければならない．これから固有値としての波数 k の値が決まる．この式の自明な解として $k = 0$ が存在するが，これを $k_0 = 0$ とし，以下，正の解を小さい方から $k_1, k_2, k_3, \dots$ と無限個求まる．(3.8) 式からこの k_i に対応する ω の値を $\omega_i = ck_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ とする．以下では，(3.7) の関数 $X(x)$ を固有値ごとに区別して，固有関数を

$$X_0(x) = 1/\sqrt{2}, \quad X_i(x) = \cos[k_i(\ell - x)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

と記す．ここで，(3.11) の関係を用いたが，この関数自体はまだ規格化されたものではない．

固有関数の直交性

ここでは，弾丸と弾性棒が一体化された系で考えているので，拡張された密度関数 $\rho(x)$ を Dirac δ -関数を用いて

$$\rho(x) = \rho + \frac{m}{S}\delta(x) \quad (3.14)$$

と導入する．固有関数の直交性を導くにはこの密度関数を重みとする積分を実行すると，

$$\int_{-\varepsilon}^{\ell} \rho(x) X_i(x) X_j(x) dx = N_i^2 \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

を得る．ここに積分の下限の $-\varepsilon$ は δ -関数の値がある部分をすべて含むようにするためである．また， $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタであり，規格化定数 N_i^2 は

$$N_i^2 = \frac{M + m \cos^2(k_i \ell)}{2S}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

で与えられる．したがって， $X_i(x)/N_i$ が規格化された固有関数となる．

固有関数による解の展開

ここで変位 $U(x, t)$ を

$$U(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i X_i(x) \frac{\sin(\omega_i t)}{\omega_i} \quad (3.17)$$

と固有関数を用いて展開する．前に注意したように $i = 0$ のときは $\omega_0 = 0$ であり， $\sin(\omega_0 t)/\omega_0 = t$ である．係数 K_i を決めるには初期条件を利用するが，まず，この式は $t = 0$ のとき変位がゼロであるという (3.2) 式は満たしている．問題は (3.4) 式であるが，これは

$$[1 - \theta(x - \varepsilon)]v_0 = \sum_{i=0}^{\infty} K_i X_i(x) \quad (3.18)$$

となって、この式が成立するように係数 K_i を決めるとよい。両辺に $\rho(x)X_j(x)$ を掛けて積分すると

$$v_0 \int_{-\varepsilon}^{\ell} [1 - \theta(x - \varepsilon)] \rho(x) X_j(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} K_i \int_{-\varepsilon}^{\ell} \rho(x) X_i(x) X_j(x) dx \quad (3.19)$$

となるが、この右辺は固有関数の直交性 (3.15) 式を使う、また、左辺の積分は $1 - \theta(x - \varepsilon)$ があるために $\rho(x)$ に含まれる δ -関数の部分しかきいてこない。結果は、

$$K_i = \frac{mv_0 X_i(0)}{SN_i^2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

となる。

以上の結果をまとめて (3.17) 式の $U(x, t)$ は

$$U(x, t) = \frac{mv_0}{M+m} t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2mv_0 \cos(k_i \ell)}{[M + m \cos^2(k_i \ell)] k_i c} \cos[k_i(\ell - x)] \sin(k_i c t) \quad (3.21)$$

と得られる。ここで、固有関数の定義式 (3.13)、規格化定数の定義式 (3.16)、および (3.8) 式の関係を用いた。

歪みについて

(3.21) 式を x で微分して歪みを求めると、

$$\partial_x U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2mv_0 \cos(k_i \ell)}{[M + m \cos^2(k_i \ell)] c} \sin[k_i(\ell - x)] \sin(k_i c t) \quad (3.22)$$

となり、この式は分母にあった k_i がなくなるので、収束性が悪くなると思われるが、方程式 (3.12) を用いて変形すると

$$\partial_x U(x, t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2Mv_0 \sin(k_i \ell)}{[M + m \cos^2(k_i \ell)] c k_i \ell} \sin[k_i(\ell - x)] \sin(k_i c t) \quad (3.23)$$

となり、その上、 $\sin(k_i \ell)$ は交互に符号が変わるので、その収束性はそれほど悪くはない。

運動量保存

(3.21) 式を時間 t で微分して速度を求めると

$$\partial_t U(x, t) = \frac{mv_0}{M+m} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2mv_0 \cos(k_i \ell)}{M + m \cos^2(k_i \ell)} \cos[k_i(\ell - x)] \cos(k_i c t) \quad (3.24)$$

となるので、弾性棒全体の運動量は

$$\int_0^{\ell} \partial_t U(x, t) \rho S dx = \frac{Mmv_0}{M+m} - m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2mv_0 \cos^2(k_i \ell)}{M + m \cos^2(k_i \ell)} \cos(k_i c t) \quad (3.25)$$

となり、また、この時点での弾丸の運動量は、 $x = 0$ のときの (3.24) 式より、

$$m \partial_t U(0, t) = \frac{m^2 v_0}{M+m} + m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2mv_0 \cos^2(k_i \ell)}{M + m \cos^2(k_i \ell)} \cos(k_i c t) \quad (3.26)$$

となる．これら (3.25) (3.26) 式を加えると，系全体の運動量は

$$\int_0^\ell \partial_t U(x, t) \rho S dx + m \partial_t U(0, t) = mv_0 \quad (3.27)$$

と初めに弾丸が持っていた運動量 mv_0 に等しい．

変数の無次元化

ここで，前節，(2.27) ～ (2.29) 式で行った変数の無次元化，および，この節で初めて出てくる波数 k について，

$$k\ell \rightarrow k \quad (3.28)$$

を行う．この置き換えで方程式 (3.12) は

$$\tan(k) = -\mu k \quad (3.29)$$

に，また，ここでの解 (3.21) 式，および，歪み (3.22) 式は，それぞれ，

$$U(x, t) = \frac{\mu v_0}{1 + \mu} t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\mu v_0 \cos(k_i)}{[1 + \mu \cos^2(k_i)]k_i} \cos[k_i(1 - x)] \sin(k_i t) \quad (3.30)$$

$$\partial_x U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\mu v_0 \cos(k_i)}{1 + \mu \cos^2(k_i)} \sin[k_i(1 - x)] \sin(k_i t) \quad (3.31)$$

および，(3.30) 式を時間で微分した無次元速度は，

$$\partial_t U(x, t) = \frac{\mu v_0}{1 + \mu} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\mu v_0 \cos(k_i)}{1 + \mu \cos^2(k_i)} \cos[k_i(1 - x)] \cos(k_i t) \quad (3.32)$$

となる．

前節で求めた解は，入射波が他端で反射し，ふたたび原点に戻ってくるまでに時間範囲で有効であったが，この節で求めた解は，弾丸が常に弾性棒に付着しているという条件のもとに，いかなる時刻に対しても解として適用されるものである．しかしながら，この節で求めた解からは，固有関数の無限和を実行しないかぎり，解の様子をくみ取することは不可能であり，この結果からは何の情報も得られない．本当に前節の結果，(2.30) (2.31) (2.32) とここで得られた結果 (3.30) (3.31) (3.32) は同じものなのかという疑問が湧く．そこでこれら 2 つの解の数値計算を実行し，グラフを描いたところ，ぴたりと一致するという結果になった．これから固有関数の無限和が解析的に実行されれば，これら 2 つの方法で解かれた解は同じものであることが，証明できるはずである．

4 コンピュータ・シミュレーション

この節では，前節までに得た結果をコンピュータ言語 Visual Basic を用いてシミュレートしてみる．初めに，第 2 節で議論した一般解から出発する解析結果に基づいてプログラムしたものを示す．弾性棒に弾丸が衝突したときの様子を動画で示すものも作成したが，これらをすべて載

せるわけにはいかないので、このうち2枚だけを図2と図3に示す．図2は弾丸が衝突し、最初の入射波が圧縮波として他端の $x = \ell$ 方向に進んでいるところ、図3は $x = \ell$ で反射した波が膨張波として戻っているところである．

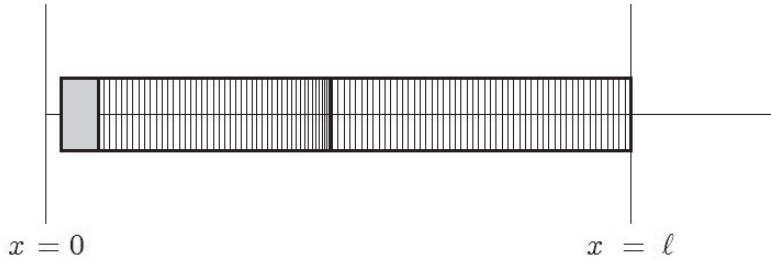


図2 入射波が進む様子

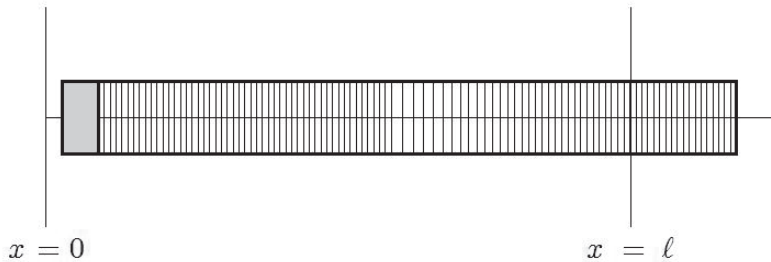


図3 反射波が戻る様子

この弾丸衝突時の入力データは、弾性棒の長さ ℓ 、断面積 S 、密度 ρ 、Young 率 E 、弾丸の質量 m 、衝突速度 v_0 について、

$$\ell = 1 \text{ m}, \quad S = 0.01 \text{ m}^2, \quad \rho = 2200 \text{ kg/m}^3, \quad E = 20 \text{ GPa}, \quad m = 2 \text{ kg}, \quad v_0 = 300 \text{ m/s}$$

としたものである．この設定で、波動伝播速度 c は $c = 3015.11 \text{ m/s}$ 、弾性体の質量 M は $M = 22 \text{ kg}$ となる．なお、これらの図および以下の図では、波動の振幅および歪みについて図が見やすくなるよう適切な倍率を掛けている．

次ページ以下に示す図は、変位および歪みに関する時間履歴を示すもので、水平方向に x -軸、斜め上方向に時間 t -軸、および上方向にそれらの大きさをとったものである．ここでは、第2節で求めた解と第3節で求めた解に違いがあるかないかを判定するために、両方の解析結果に基づいてグラフ化している．図4、図6は第2節の解 (2.30) (2.31) 式に基づく変位と歪みの時間履歴、また、図5、図7は第3節で求めた解 (3.30) (3.31) 式に基づく時間履歴をグラフ化したものである．第2節で求めた解は時間範囲が、無次元時間で、 $0 \leq t < 2$ の範囲に限定されているが、その範囲内で見てもこれらグラフに差異はまったく見られず、非常に高い精度で一致していると言わざるを得ない．なお、第3節で求めた解を数値化するにあたっては固有値の個数を100個とした．

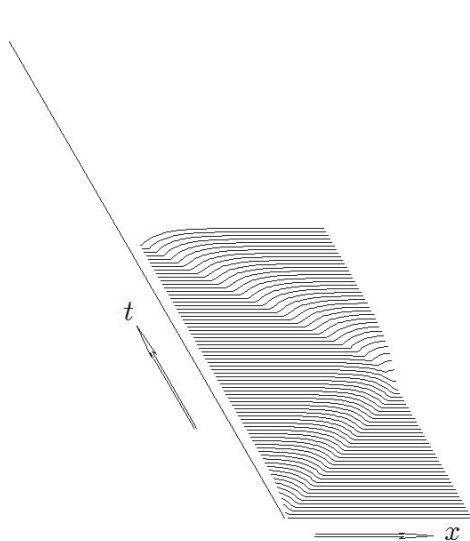


図4 (2.30)式に基づく変位履歴

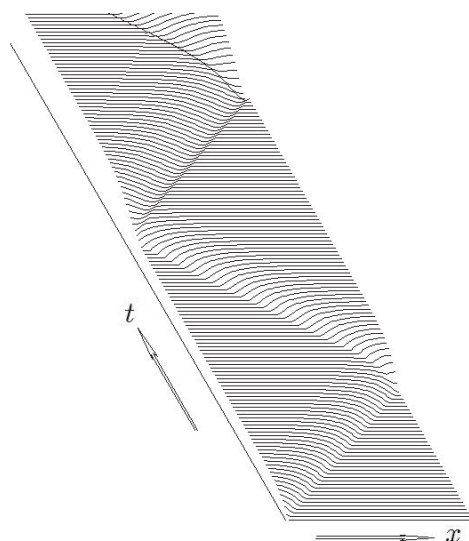


図5 (3.30)式に基づく変位履歴

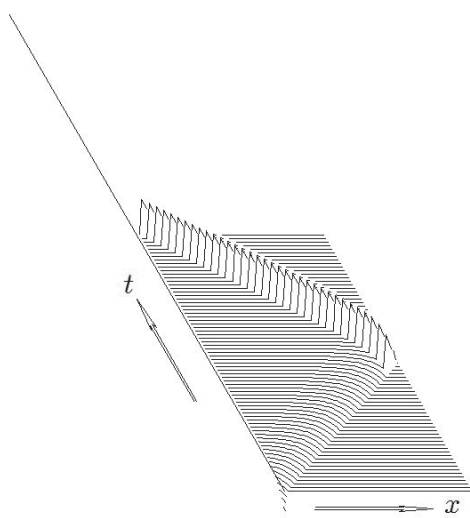


図6 (2.31)式に基づく歪み履歴

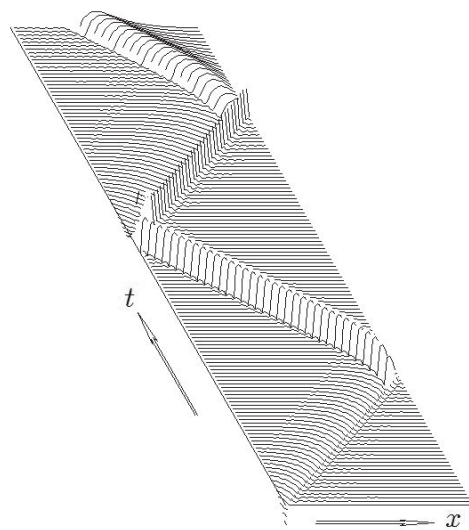


図7 (3.31)式に基づく歪み履歴

図4, 図5の変位履歴では, ちょうど津波が押し寄せてくるような図になっているが, これは時間が経つにしたがい x の正方向に弾性棒自身が進んで行くためである. また, 図6, 図7の歪みのグラフから, 弾丸衝突によって発生する入射波は, 負の圧縮歪みであるが, それが, 他端で反射したとたんに正の引っ張り歪みに変化することがよく見てとれる. また, 第3節の解析に基づく図5, 図7からは, 時間が $2 < t$ のときの波の様子は時間が $0 \leq t < 2$ のときの単なる繰り返しではないことも理解される.

ここで用いた一次元解析では、波が伝搬しても歪みの大きさが変化しないが、実際の裏面剥離のときは、3次元効果が効いてくるので、波が拡がることによる減衰が起こるはずである。このことに関しては、次節で簡単に考察する。

5 3次元の考察

1次元解析は完全な形で解が求まるという利点があるが、波が拡がることによる減衰が起きないので、一度、破壊が起こるとすべての点で破壊が起こってしまうという欠点がある。しかしながら、第1節で述べたように裏面剥離の問題を3次元で厳密に解析することはほとんど不可能である。

3次元における球面波

ここでは3次元の波動伝播の仕方を近似的に波面を求める立場で扱ってみよう。すなわち、コンクリート板に弾丸が垂直に衝突するとき、板の面に垂直方向に伝播する波はほとんど球面波の一部と考えてよいだろう。したがって、ここでは原点からの距離を r とし、弾性体の変位が r 方向のみで、かつその変位が座標 r と時間 t のみの関数 $U(r, t)$ となる場合を考える。このとき弾性体の波動方程式は

$$\partial_t^2 U(r, t) = c^2 \left[\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{1/(1-\nu)}{r^2} \right] U(r, t) \quad (5.1)$$

となる。ここに、 c は縦波速度、 ν は Poisson 比である。この方程式の一般解は知られていないが^{*1}、1パラメータを持つ解は求めることができる。まず、変位 $U(r, t)$ の時間部分が振動数 ω の三角関数で表わされるものとし、

$$U(r, t) = R(r) \sin(\omega t) \quad (5.2)$$

とすると、 $R(r)$ は方程式

$$\left[\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + k^2 - \frac{1/(1-\nu)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (5.3)$$

を満たす。ここに、振動数 ω と波数 k の関係は $k = \omega/c$ である。この方程式の解は Bessel 関数を用いて表すことができ、

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\mu+\frac{1}{2}}(kr) \quad (5.4)$$

となる。ここに、Poisson 比 ν と Bessel 関数の次数を決める μ との関係は

$$\mu(\mu+1) = \frac{1}{1-\nu} \quad (5.5)$$

である。ここで、波数 k を一定値とした場合、Bessel 関数の漸近表示から、この関数の値は r が大きくなったとき $1/\sqrt{r}$ に従って減衰するので、 $R(r)$ は r に逆比例して小さくなる。

^{*1} この方程式の右辺大括弧中の3項目がもしなければ、この方程式は、一般解 $U(r, t) = \frac{1}{r} [F(r-ct) + G(r+ct)]$ を持つ。空中を伝播する音波の方程式の場合はそうになっているが、弾性体の場合はこの3項目が存在するために一般解は求められない。

裏面での反射波

もしコンクリート面に与えられる衝撃の面積が非常に小さく、かつ、板厚およびその近傍方向に発射される波の場合は前記の球面波で近似できるであろう。この球面波が裏面に達し反射したときの波面を求めてみよう。この場合は、板厚方向の軸に対する軸対称性があるので 1 次元下がつて 2 次元で解析できる。すなわち、衝撃が与えられる点を原点とし、厚さ方向に x 軸、板面に平行な方向に y 軸をとる (図 8)。コンクリート板の厚さを ℓ とし、 a をパラメータとして裏面上の点 $(x, y) = (\ell, a)$ に達した波がここで反射してから作る球面は

$$(x - \ell)^2 + (y - a)^2 = (ct - \sqrt{\ell^2 + a^2})^2 \quad (5.6)$$

となる。ここに時間 t は原点を出発してからの経過時間である。Huygens の原理に従うとこのパラメータ a をいろいろに変化させたときの包絡線が新しい波面となる。そこで、この (5.6) 式を a で微分すると

$$a = \frac{\ell y}{\sqrt{(ct)^2 - y^2}} \quad (5.7)$$

となり、これを (5.6) 式に戻してやると、

$$(x - 2\ell)^2 + y^2 = (ct)^2 \quad (5.8)$$

となる。ちょうど反射波は板の裏面が鏡面になっていて、原点の鏡像点 $(2\ell, 0)$ から発した波のように振舞うことがわかる。この反射の様子を図 8 に示すが、裏面剥離が実際に図 1 のように球面の形で生じることとよく一致している。また、2 節で議論したように、原点から裏面に達するあいだは波は圧縮波として進行するが、反射した後は膨張波として作用するのでコンクリート板は反射した後の方が破壊されやすい。

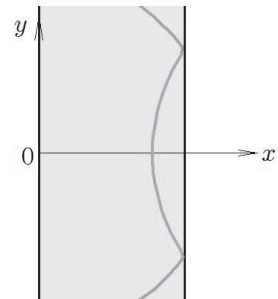


図 8 裏面での波の反射

もちろん、波が進行した距離が大きくなるにつれ波の振幅は距離に逆比例して小さくなるので、破壊される領域は自ずと限定されてくる。

6 おわりに

裏面剥離の原因を探るため、ここでは極端なまでに単純化した 1 次元モデルを提供した。もちろん、1 次元モデルでは現実の裏面剥離に対応するようなデータを得ることは不可能であるが、「はじめに」のところで述べたいいくつかの疑問に答えることはできたと思われる。まとめると、

- (1) 一次元の波動方程式を用いて弾丸衝突の場合の境界値問題を解いたこと。
- (2) その結果、弾性棒内に発生する波の変位および歪みを求めたこと。

その結果、裏面剥離の原因として、

- (3) コンクリートの引っ張り強度は、圧縮強度の十分の一以下しかないこと。

- (4) 弾丸衝突によって起こる圧縮波は反射すると膨張波になり，引っ張りに弱いコンクリートが破壊されること．

が挙げられる．この最後に述べたことは，spalling 破壊と言われるが，この現象は，機械工学などの他分野でも破壊メカニズムの重要な問題として扱われている．逆にこの現象を利用した技術に，医学分野における衝撃波を用いた各種内臓結石の破碎術，食品分野における各種食品の粉碎術などがあげられる．この spalling 現象は今後もより詳しく解明され，その利用術もますます発達していくものと思われる．

この論文では，初めに，1次元波動方程式の一般解から出発し境界値問題，衝撃問題を解析し，その後，別解法として固有値・固有関数を利用する方法でも解を求めてみた．方程式の一般解が求められるのは方程式自体が非常に簡単な場合に限られるので，実際はこの固有値・固有関数を用いて解く方法の方が自然なのではあるが，この場合，解は固有関数の無限和で表現されるので数式から解の様子を知るのは非常に困難になってしまう．ここで扱った一般解から導出する方法では，入射波や反射波の一つひとつが数式から見えてくるので，この種の解析にとって非常に有意義である．次回の論文でこれら2つの方法における解の等価性について議論する⁷⁾．

謝辞

ここで取り上げた問題について，適切な助言をいただいた北海学園大学教授・吉田文夫氏，ならびに京都大学名誉教授・中西襄氏に深く感謝する．

参考文献

- 1) John S. Rinehart, Some Quantitative Data Bearing on the Scabbing of Metals under Explosive Attack, Journal of Applied Physics, Vol. 22, No. 5, May 1951
- 2) 別府万寿博，三輪幸治，大野友則，塩見昌紀：鋼製剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリート板の局部破壊に関する実験的研究，土木学会論文集，Vol.63, N0.1, pp.178-191, 2007.
- 3) 別府万寿博，三輪幸治，伊東雅晴，片山雅英，大野友則：剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリート板の局部破壊発生メカニズムに関する数値解析的検討，構造工学論文集，Vol.53A, pp.1293-1304, 2007.
- 4) 別府万寿博，三輪幸治，高橋順，小川敦久：剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリートの板の裏面剥離に関する繊維補強の効果，第10回 構造物の衝撃問題に関するシンポジウム論文集，土木学会主催，於ける九州大学，2010年12月．
- 5) 世戸憲治，野中泰二郎：無限に広い弾性板の衝撃問題について，北海学園大学工学部研究報告，第39号，2012.
- 6) 片山雅英：高速衝突と爆発問題を中心とした諸分野における衝撃解析，第7回衝撃工学フォーラム，日本材料学会主催，於ける東京理科大学，2008年11月21日．
- 7) 中西襄，世戸憲治：弾丸衝突により弾性棒に発生する波動の数学的解析，北海学園大学工学部研究報告，第40号，2013 予定．